1933 № 7

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК



BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ • EXEMPLE DE CITATION

Н. Н. Яковлев. Планктонный граптолит из Казакстана.
ИМЕН, 1933, № 7, стр. 979.

N. Jakovlev. Un graptolithe planctonique du Kasakstan.
BAS-MN, 1933, № 7, p. 979 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Октябрь 1933 г.

Непременный секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров
Ученый корректор С. С. Чернявский

Начато набором в июне 1933 г. — Подписано к печати 30 октября 1933 г.

152 (895—1046) стр. (38 фиг.) + 1 табл.
Формат бук. 72 × 110 см — 9 7/8 печ. л. — 42 000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 2700
Ленгорлит № 17020. — АПИ № 279. — Заказ № 1399

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. Ф. СУББОТИНА

(Представлено академиком **А. Н. Крыловым)**

Как известно наилучшими способами численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений являются способы, основанные на формулах исчисления конечных разностей.[1] Эти последние способы могут быть разделены на две группы: к первой мы отнесем методы Адамса, Штёрмера и соответствующие им методы квадратур, в которых искомое значение неизвестной функции выражается через разности, уже имеющиеся в вычислительной схеме, а потому находится сразу; методы второй группы (метод Коуэлла; классический метод квадратур) основаны на формулах, выражающих искомую функцию через разности, зависящие от неизвестных значений этой функции, так что вычисление здесь может вестись лишь последовательными приближениями.

Но если методы Адамса и Штёрмера отличаются наибольшей простотой вычислений (что особенно важно в технических применениях численного интегрирования), то методы второй группы обладают своими достоинствами, делающими их незаменимыми в Астрономии: они позволяют вести интегрирование через интервал значительно больший и дают результат с максимальной точностью, достижимой при данной величине интервала и данном числе знаков. Необходимость вести вычисления последовательными приближениями является основным недостатком методов второй группы, влекущим не только неудобства в работе, но и сужение интервала интегрирования (ибо при увеличении интервала число приближений быстро растет).

[1] А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях, изд. 2-е, 1933, стр. 404 и сл.

Моей задачей является рассмотрение тех путей, которые позволяют, если не устранить, то настолько ослабить указанное неудобство методов второй группы, что оно становится мало ощутимым.

1. Так как рассматриваемые способы численного интегрирования имеют совершенно одинаковый характер для уравнений любого порядка, то мы ограничимся рассмотрением уравнений второго порядка вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, t). \tag{1}$$

Пусть независимое переменное получает значения

$$t_k = t_0 + kw,$$

где k целое число. Соответствующие значения x обозначим через

$$x(t_k) = x_k$$

и положим

$$w^2 F(x_k, t_k) = f_k. \tag{2}$$

Для последовательных разностей функции f_k мы будем пользоваться обозначениями, указываемыми равенствами

$$f^m_{k+1} - f_k^m = f^{m+1}_{k+\frac{1}{2}}, \qquad f^m_{k+\frac{1}{2}} - f^m_{k-\frac{1}{2}} = f_k^{m+1},$$

$$f^m_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(f^m_{k+1} + f^m_k\right), \qquad f_k^m = \frac{1}{2}\left(f^m_{k+\frac{1}{2}} + f^m_{k-\frac{1}{2}}\right)$$

в которых $m = 0, 1, 2, \ldots$ и $f_k^0 = f_k$. Эти же равенства определяют, при $m = -1$ и $m = -2$, последовательные суммы первого и второго порядка.

Обозначая, наконец, через

$$\Delta^2_{n-1} = x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}$$

вторую разность искомой функции, так что

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + \Delta^2_{n-1},$$

мы можем методы Коуэлла и Штёрмера выразить соответственно формулами[1]

$$(A) \qquad \Delta^2_{n-1} = f_{n-1} + \frac{1}{12} f^2_{n-1} - \frac{1}{240} f^4_{n-1} + \frac{31}{60480} f^6_{n-1} - \ldots$$

$$(B) \qquad \Delta^2_{n-1} = f_{n-1} + \frac{1}{12} f^2_{n-2} + \frac{1}{12} f^3_{n-\frac{5}{2}} \quad \frac{19}{240} f^4_{n-3} + \frac{3}{40} f^5_{n-\frac{7}{2}} + \ldots$$

[1] М. Ф. Субботин. Курс небесной механики, т. I, 1933, стр. 274—277.

Просуммировав дважды каждую из этих формул, получим, с одной стороны, классический метод квадратур (формула Гаусса):

$$(A') \qquad x_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^{2} + \frac{31}{60480} f_n^{4} - \ldots,$$

с другой — метод квадратур, соответствующий методу Штёрмера:

$$(B') \quad x_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_{n-1} + \frac{1}{12} f^{1}_{n-\frac{3}{2}} + \frac{19}{240} f^{2}_{n-2} + \frac{3}{40} f^{3}_{n-\frac{5}{2}} + \ldots$$

Если рассматриваемый интеграл $x(t)$ уравнения (1) определяется двумя начальными значениями x_{-1} и x_0 (как это делается при вычислении возмущений планет и комет), то полагая в формулах (A') и (B') $n = -1$ и $n = 0$, найдем f_{-1}^{-2} и f_0^{-2}, после чего остальные значения вторых сумм можно будет вычислять по формуле

$$(3) \qquad f_n^{-2} = 2f_{n-1}^{-2} - f_{n-2}^{-2} + f_{n-1}.$$

В том случае, когда интегрирование распространяется на большое число интервалов, и нужна вся возможная точность, методы квадратур (A'), (B') имеют преимущество перед соответствующими разностными методами (A) и (B), поскольку в них далеко не так быстро происходит накопление ошибок связанное с двойным суммированием. С другой стороны, формулы (B) и (B') вследствие крайней медленности убывания коэффициентов являются не пригодными в тех случаях, когда берется большой интервал w (ибо разности убывают тогда не достаточно быстро), и когда нужна большая точность (ибо убывание коэффициентов не компенсирует неизбежного возрастания ошибок последовательных разностей). Принимая все это во внимание, мы должны признать классический метод квадратур, основанный на формулах (A') и (3), наиболее выгодным с точки зрения точности результатов.

Но как раз этот метод является наименее выгодным с точка зрения удобства вычисления: вычисление x_n по формуле (A') приходится вести последовательными приближеяиями, взяв для начала экстраполированные значения $f_n, f_n^{2}, \ldots$ Поэтому излагаемые ниже способы, позволяющие ослабить указанное неудобство, не уменьшая интервала w, не лишены интереса.

2. Первый способ. По самому определению разностей имеем

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + f^{1}_{n-\frac{1}{2}} = \\ &= f_{n-1} + f^{1}_{n-\frac{3}{2}} + f^{2}_{n-1} = \\ &= f_{n-1} + f^{1}_{n-\frac{3}{2}} + f^{2}_{n-2} + f^{3}_{n-\frac{3}{2}} = \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Подставим одно из этих выражений, например третье, вместо f_n в равенство (A'). Это даст

$$x_n = \bar{x}_n + \sigma_n$$

где

$$\bar{x}_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12}\left(f_{n-1} + f^{1}_{n-\frac{3}{2}} + f^{2}_{n-2}\right) - \frac{1}{240} f_n^{2} + \frac{31}{60480} f_n^{4} - \ldots \tag{4}$$

$$\sigma_n = \frac{1}{12} f^{3}_{n-\frac{3}{2}} \tag{5}$$

Для $\bar{x}_n$ мы получим сразу окончательное значение, ибо ошибки экстраполированных значений f_n^2, $f_n^4, \ldots$ вследствие малости коэффициентов чувствительного влияния на $\bar{x}_n$ не окажут. При последовательных приближениях будут меняться лишь поправка σ_n. Но эта поправка мала, и вычисление ее проводится весьма удобно. Для начала берем экстраполированное значение, например

$$\sigma_n \approx \frac{1}{12}\left(f^{3}_{-\frac{5}{2}} + f^{4}_{n-3}\right).$$

Таким образом, при указанном расположении вычислений последовательные приближеиия не избегнуты, но сделаны весьма простыми и удобными.

Иногда может оказаться выгодным заменить формулы (4), (5) другими, например следующими:

$$\bar{x}_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12}\left(f_{n-1} + f^{1}_{n-\frac{3}{2}} + f^{2}_{n-2} + f^{3}_{n-\frac{5}{2}}\right) - \frac{1}{240} f_n^{2} + \frac{31}{60480} f_n^{4} - \ldots \tag{6}$$

$$\sigma_n = \frac{1}{12} f^{4}_{n-2}. \tag{7}$$

Выигрывая в удобстве вычисления, по сравнению с формулой (A'), мы теряем в точности. Обозначим через ε предельную погрешность каждого из значений функции f_n. В таком случае предельная погрешность разности

$$x_n - f_n^{-2}$$

при вычислении по формуле (A') будет равна $0.1\ \varepsilon$; при вычислении по формулам (4), (5) она будет равна $1.27\ \varepsilon$; наконец для формул (6), (7) она равна $2.60\ \varepsilon$.

Заметим, что изложенный прием по существу очень близок с переходом, указываемым акад. А. Н. Крыловым (loc. cit., стр. 469—470), от формулы Лежандра (тождественной с формулой Коуэлла) к формуле Штёрмера. Но мы совершаем этот переход для соответствующих формул квадратур и, кроме того, останавливаемся на полдороге для того, чтобы не потерять преимущества в точности результата, представляемого формулой (A') по сравнению с (B').

3. Второй способ. В 1875 г. Титьен, излагая применение метода квадратур к вычислению возмущений планет и комет в полярных координатах, указал прием, позволяющий в этот специальном случае избежать вычисления последовательными приближениями.[1] В 1880 г. появился 2-й том известного трактата Оппольцера — «Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten», который содержит изложение метода Титьена (стр. 154—155), а также приспособление этого метода для вычисления возмущений прямоугольных координат (стр. 79—81).[2]

Если выделить сущность идеи Титьена, то данный им прием можно представить следующим образом. Напишем правую часть уравнения (1) в форме

(8) $$T(x,\ t) = G(t) - H(x, t)\, x.$$

Полагая, далее,

$$w^2 G(t) = g(t),\ \ w^2 H(x, t) = h(x, t),$$

что дает $f_n = g_n - h_n x_n$, представим формулу (A') в таком виде

(9) $$x_n\left(1 + \frac{1}{12} h_n\right) = S_n,$$

где

(10) $$S_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12} g_n - \frac{1}{240} f_n^{2} + \frac{31}{60480} f_n^{4} - \ldots$$

Очевидно для S_n мы получим сразу практически окончательную величину. Титьен рассматривает тот случай, когда функция $H(x, t)$ очень мала.

[1] F. Tietjen. Specielle Störungen in Bezug auf Polarcoordinaten. Berl. astron. Jb. f. 1877, Berlin, 1875.

[2] Таково происхождение «приема Оппольцера», который излагается и у Баушингера (Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, Leipzig, 1906, стр. 541) и у Штраке (Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, Berlin, 1929, стр. 263) без упоминания о Титьене. Между тем сам Оппольцер, опубликовывая этот прием (Astronomische Nachrichten, Bd. 89, 1877, стр. 278) говорит: «Schliesslich mag die Bemerkung Platz greifen, dass sich ähnlich, so wie dies Tietjen im Berliner Jahrbuch für 1877 für polare Koordinaten gethan hat, die indirekte Rechnung (т. е. последовательные приближения) bei Encke's Methode der Störungsrechnung mit Vortheil umgehen lässt, ...».

Можно сделать более широкое предположение — что производная этой функции по x очень мала. При этом условии достаточно иметь грубо приближенное значение x_n (напр. получаемое экстраполированием), чтобы совершенно точно (в пределах употребляемого числа знаков) найти

$$h_n = h(x_n, t_n).$$

Формула (9) даст сразу окончательное значение x_n.

Другой случай, когда формула (9) позволяет избежать последовательных приближений, это тот, когда уравнение (9) легко разрешимо относительно x_n.

Пример. Рассмотрим интегрирование следующей системы, имеющей основное значение для Небесной механики

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k^2 x}{r^3} + \alpha(t)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{k^2 y}{r^3} + \beta(t) \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{k^2 z}{r^3} + \gamma(t)$$

где k некоторая постоянная величина.

В этом случае для определения x_n, y_n, z_n мы будем иметь уравнения вида

$$(11) \qquad x_n\left(1 + \frac{w^2 k^2}{12 r_n^3}\right) = A_n, \quad y_n\left(1 + \frac{w^2 k^2}{12 r_n^3}\right) = B_n, \quad z_n\left(1 + \frac{w^2 k^2}{12 r_n^3}\right) = C_n$$

где

$$r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2},$$

а A_n, B_n, C_n — известные величины.

Возводя последние равенства в квадрат и складывая, получим

$$r_n^2\left(1 + \frac{w^2 k^2}{12 r_n^3}\right)^2 = S_n,$$

где

$$S_n = A_n^2 + B_n^2 + C_n^2.$$

Таким образом, достаточно построить таблицу, дающую

$$\lambda_n = \left(1 + \frac{w^2 k^2}{12 r_n^3}\right)^{-1}$$

по аргументу S_n, чтобы легко и удобно решать уравнения (11) при помощи равенств

$$x_n = \lambda_n A_n, \; y_n = \lambda_n B_n, \; z_n = \lambda_n C_n.$$

4. О методе Б. В. Нумерова. В тесной связи с методом Титьена — Оппольцера стоит прием, примененный Б. В. Нумеровым для того, чтобы в методе Коуэлла избежать последовательных приближений.[1]

Этот прием состоит, как известно, в том, что вводится новая переменная $\bar{x}$ («специальная координата»), значения которой определяются равенством

$$\bar{x}_n = x_n - \frac{1}{12} f_n. \tag{12}$$

Обозначив через $\bar{\Delta}^2$ вторую разность $\bar{x}$, получим

$$\bar{\Delta}^2{}_{n-1} = \Delta^2{}_{n-1} - \frac{1}{12} f^2{}_{n-1},$$

или, воспользовавшись формулой Коуэлла (A),

$$\bar{\Delta}^2{}_{n-1} = f_{n-1} - \frac{1}{240} f^4{}_{n-1} + \ldots \tag{13}$$

Поскольку экстраполирование дает во всех обычных случаях окончательное значение поправки

$$-\frac{1}{240} f^4{}_{n-1} + \frac{31}{60480} f^6{}_{n-1} - \ldots,$$

последнее равенство, совместно с формулой

$$\bar{x}_n = 2\bar{x}_{n-1} - \bar{x}_{n-2} + \bar{\Delta}^2{}_{n-1}, \tag{14}$$

позволяет находить сразу окончательные значения $\bar{x}_n$. Переход от $\bar{x}_n$ к x_n совершается путем разрешения уравнения (12).

[1] Б. Нумеров. Méthode nouvelle de la détermination des orbites et le calcul des éphémérides en tenant compte des perturbations. Тр. Гл. Росс. астроф. обсерват., т. II, 1923.

Легко видеть, что метод Б. В. Нумерова есть ничто иное как разностная форма метода Титьена — Оппольцера. В самом деле, если бы вместо того, чтобы брать вторые разности от обоих частей равенства (12), мы сразу воспользовались формулой (A'), то мы бы имели для определения $\bar{x}_n$ формулу

$$\bar{x}_n = f_n^{-2} - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60480} f_n^4 - \dots \tag{15}$$

С другой стороны, уравнение (12) тождественно с уравнением (9): если мы снова представим функцию $F(x, t)$ в форме (8), то уравнение (12) примет вид

$$\bar{x}_n + \frac{1}{12} g(t_n) = x_n \cdot \left[1 + \frac{1}{12} h(x_n, t_n) \right] \cdot \tag{16}$$

Очевидно равенства (15), (16) лишь обозначениями отличаются от соотношений (9), (10), представляющих метод Титьена — Оппольцера.

Сравнивая метод Б. В. Нумерова, выражаемый формулами (12), (13), (14), с методом Титьена — Оппольцера, в котором вычисления ведутся либо по формулам (3), (9), (10), либо по формулам (3), (15), (16), мы на стороне этого последнего метода должны будем признать преимущество, отличающее все квадратурные методы от соответствующих разностных — значительно более медленное накопление погрешностей.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933.
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКИМИ ЛИНИЯМИ КРИВИЗНЫ

Л. Н. СРЕТЕНСКОГО

(*Представлено академиком* С. А. Чаплыгиным)

1. Определение потенциальных поверхностей.

Рассмотрим какую-нибудь поверхность (S); отнесем ее к системе криволинейных ортогональных координат.

Пусть дифференциальная форма

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2 \tag{1}$$

будет квадратом линейного элемента этой поверхности.

Какой бы формы поверхность (S) ни была взята, всегда возможно преобразовать ее в самое себя точечным преобразованием так, чтобы линии семейства $u = c$, а равно $v = c$, переходили сами в себя.

Самый общий вид такого преобразования определяется уравнениями:

$$u_1 = f(u), \quad v_1 = \varphi(v) \tag{2}$$

где функции f и φ совершенно произвольны.

В выражение этих функций могут входить один или несколько произвольных параметров.

Остановимся на случие одного параметра t.

Уравнения (2) определяют тогда, при изменении этого параметра, непрерывное преобразование поверхности (S) в самое себя. При этом преобразовании каждая линия координат переходит в линию координат своего семейства.

Формулы (2), зависящие от произвольного параметра t, не определяют, вообще говоря, непрерывной одночленной группы преобразований поверхности (S).

Формулы (2) будут определять одночленную непрерывную группу преобразований в смысле S. Lie, если они эквивалентны или

$$\begin{aligned} \psi(u_1) &= \psi(u) + t \\ \chi(v_1) &= \chi(v) + t \end{aligned} \tag{3}$$

или

$$\begin{aligned} \psi(u_1) &= \psi(u) + t \\ v_1 &= v \end{aligned} \tag{3'}$$

Функции ψ и χ произвольны. Этим формулам преобразования можно придать изменением параметров $\psi(u)$ на u и $\chi(v)$ на v, более простой вид:

$$u_1 = u + t, \ \ v_1 = v + t \tag{4}$$

или

$$u_1 = u + t, \ \ v_1 = v \tag{4'}$$

соответственно (3) и (3').

Будем рассматривать теперь поверхность (S), как бесконечно тонкую пленку (сжимаемой, вообще говоря) жидкости. Уравнения (4), а равно и (4'), определяют тогда изменения координат частицы жидкости со временем t. При этом движении частицы жидкости, располагавшиеся в момент $t = 0$ вдоль какой-нибудь координатной линии некоторого семейства, будут в произвольный момент времени t располагаться на координатной линии того же семейства.

Это движение жидкости по поверхности (S) не обладает, вообще говоря, потенциалом скоростей.

Потенциал скоростей будет существовать лишь в том случае, когда выражение элемента циркуляции

$$dI = V \cdot \cos(V, ds)\, ds$$

будет полным дифференциалом. V обозначает здесь скорость частицы.

Останавливаясь сначала на формулах (4), получаем

$$dI = E du + G dv$$

Чтобы это выражение было полным дифференциалом, E и G необходимо должны быть частными производными по u и v, соответственно, некоторой функции ω:

$$E = \frac{\partial \omega}{\partial u}, \quad G = \frac{\partial \omega}{\partial v}$$

Итак, движение жидкости по поверхности (S) будут незавихренным, если линейный элемент этой поверхности в параметрах u и v ортогональной системы координат имеет потенциальный вид:

$$ds^2 = \frac{\partial\omega}{\partial u} du^2 + \frac{\partial\omega}{\partial v} dv^2 \tag{5}$$

Поверхность (S) называется потенциальной, если линейный элемент ее в параметрах линий кривизны имеет вид (5).

Нам остается рассмотреть движение жидкости, управляемое формулами (4'). Это движение будет потенциальным, если ds^2 имеет геодезический вид

$$ds^2 = du^2 + Gdv^2$$

Этот случай мы исключаем из рассмотрения.

Потенциальные поверхности занимают совершенно особое место в дифференциальной геометрии, обязанное изяществом их теории. G. Darboux предложил называть потенциальные поверхности поверхностями E в честь Д. Ф. Егорова, положившего основание их теории*.

В настоящее время известно крайне мало примеров поверхностей E.

В этой работе мы указываем весьма широкий класс потенциальных поверхностей. Именно, мы определяем все потенциальные поверхности с плоскими линиями кривизны.

Получаемое нами семейство поверхностей E зависит от трех произвольных функций. Это, видимо, самый широкий класс поверхностей E, известных в настоящее время.

2. Основные уравнения задачи

Мы проведем решение нашей задачи, пользуясь кинематическим методом.

Выпишем сначала основные уравнения теории этого метода в применении к потенциальным поверхностям. Обратимся для этого к таблице V тома II «Leçons sur la théorie des surfaces» Darboux.

Так как линейный элемент поверхностей E имеет следующий вид

$$ds^2 = \frac{\partial\omega}{\partial u} du^2 + \frac{\partial\omega}{\partial v} dv^2, \tag{1}$$

* Д. Ф. Егоров. Об одном классе ортогональных систем. М., 1901.

то группы формул (1) и (A) названной таблицы принимают такой вид:

$$\xi = \sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}}, \quad \eta = 0, \quad \xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial v}}, \quad p = 0, \quad q_1 = 0 \qquad (2)$$

$$r = -\frac{1}{\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial v}}} \cdot \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial u} = -qr_1$$

$$r_1 = -\frac{1}{\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}}} \cdot \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial v}}, \quad \frac{\partial q}{\partial v} = \quad rp_1 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = -qp_1, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial p_1}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{p_1}\frac{\partial q_1}{\partial v}\right) + qp_1 = 0.$$

Эти формулы дают нам тотчас же следующий важный результат: вдоль траектории группы (4) § 1 основной трехгранник переносится жидкостью без вращения около нормали поверхности. Действительно, формулы, определяющие r и r_1, дают после выполнения дифференцирования:

$$r = -\frac{\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}}{2\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}}}; \quad r_1 = \frac{\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}}{2\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}}} \qquad (4)$$

равенство нулю компоненты вращения $r + r_1$, трехгранника на нормаль. Это основное свойство поверхностей E приводит нас к другому определению этих же поверхностей: если линия сжатия линейчатой поверхности, образованной касательными к линиям кривизны, проведенными в точках траектории группы § 1, есть эта самая траектория, то поверхность — потенциальная.

Доказательство этого свойства поверхностей E прямо следует из теоремы § 1085 «Leçons» Darboux.

Допустим теперь, что линии кривизны $v = C$ нашей поверхности суть плоские кривые. При сферическом отображении поверхности эти кривые перейдут, по теореме Joachimsthal'я, в круги поверхности сферы.

Если мы напишем, что геодезическая кривизна такого круга есть величина, зависящая только от v, мы передадим тогда уравнением требуемое свойство линий кривизны $v = C$.

Линейный элемент сферы Gauss'а имеет следующий вид

$$d\sigma^2 = p_1^2\, dv^2 + q^2\, du^2$$

отсюда геодезическая кривизна линии $v = c$ будет определяться так

$$\frac{\sin \omega}{\rho} = -\frac{1}{qp_1} \cdot \frac{\partial q^*}{\partial v}$$

Поэтому, называя через $\frac{1}{V}$ геодезическую кривизну круга сферы Gauss'а, записываем основное уравнение нашего вопроса так

$$qp_1 = -V\frac{\partial q}{\partial v} \tag{5}$$

V есть произвольная функция v.

Таким образом вопрос об определении поверхностей E с плоскими линиями кривизны привелся к исследованию уравнений (3) и (5).

3. Интеграция уравнений задачи

Совместное рассмотрение уравнения (5) с четвертым уравнением системы (3) § 2 дает нам величину q:

$$q = -Vr \tag{1}$$

Подстановка этого значения в уравнение (5) предыдущего § дает нам

$$p_1 = -\frac{1}{p} \cdot \frac{\partial Vr}{\partial v} \tag{2}$$

Подставляя это значение p_1 во второе уравнение системы (3), находим

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial Vr}{\partial v}\right) = Vr^2$$

приняв во внимание, что $r_1 = -r$. Это уравнение легко приводится к следующему виду

$$\frac{\partial^2 \ln r}{\partial u \partial v} = r^2 \tag{3}$$

Рассмотрим затем пятое уравнение системы (3) § 2. Замена в нем q и p_1 найденными значениями (формулы (1) и (2)) приводит нас ко второму уравнению для r:

$$\frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial v} = -V\frac{\partial Vr}{\partial v}$$

* См. формулу (18) главы I, книги V 2-го издания Darboux «Leçons sur la théorie générale des surfaces».

Перепишем его так:

$$\frac{\partial lnr^2}{\partial u} + (1 + V^2)\frac{\partial lnr^2}{\partial v} = -2VV' \tag{4}$$

Итак, величина r есть интеграл общий уравнениям (3) и (4). Общий интеграл уравнения (4) определяется совершенно просто; он пишется так:

$$r^2 = \frac{F(t)}{1 + V^2} \tag{5}$$

где $t = u - \int \frac{dv}{1+V^2}$; $F(t)$ есть произвольная положительная функция t; подстановка выражения (5) в уравнение (3) приводит нас к следующему уравнению для $F(t)$:

$$\left(\frac{F'}{F}\right)' + 2F = 0$$

Общий интеграл этого уравнения пишется так

$$F(t) = \frac{k^2 L^2 e^{kt}}{(1 + L^2 e^{kt})^2},$$

где k и L произвольные постоянные интеграции.

Постоянная L существенной роли не играет и может поэтому быть заменена единицей.

Итак

$$r^2 = \frac{k^2 e^{kt}}{(1 + V^2)\cdot(1 + e^{kt})^2} \tag{6}$$

Таким образом, r^2 становится известным.

После этого является возможным определить ω и, значит, линейный элемент искомых поверхностей.

Для определения ω через r^2 возьмем уравнение (4) § 2; оно может быть представлено так:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = -2r\sqrt{\frac{\partial \omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial v}} \tag{7}$$

или

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} = -\frac{2}{\bar{u} + \bar{v}}\sqrt{\frac{\partial \omega}{\partial \bar{u}}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial \bar{v}}} \tag{7'}$$

если взять

$$\bar{u} = e^{ku}, \quad \bar{v} = exp\left(k\int\frac{dv}{1+V^2}\right)$$

за новые переменные.

Это уравнение интегрируется методом Darboux II порядка. Именно, оно находится в инволюции с такими двумя уравнениями

$$\frac{\frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{u}^2}}{2\sqrt{\frac{\partial \omega}{\partial \bar{u}}}} + \frac{\sqrt{\frac{\partial \omega}{\partial \bar{u}}}}{\bar{u}+\bar{v}} = A''(\bar{u}) \tag{8}$$

$$\frac{\frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{v}^2}}{2\sqrt{\frac{\partial \omega}{\partial \bar{v}}}} + \frac{\sqrt{\frac{\partial \omega}{\partial \bar{v}}}}{\bar{u}+\bar{v}} = B''(\bar{v}) \tag{8'}$$

где $A''(u)$ и $B''(\bar{v})$ вторые производные произвольных функций $A(\bar{u})$ и $B(\bar{v})$.*

Отсюда общий интеграл уравнения (7') будет писаться так:

$$\omega = \int \left\{A' + \frac{B-A}{\bar{u}+\bar{v}}\right\}^2 d\bar{u} + \left\{B' + \frac{A-B}{\bar{u}+\bar{v}}\right\}^2 d\bar{v} \tag{9}$$

Поэтому линейный элемент искомых поверхностей E будет иметь следующий вид

$$ds^2 = k\bar{u}\left\{A' + \frac{B-A}{\bar{u}+\bar{v}}\right\}^2 d\bar{u}^2 + \frac{k\bar{v}}{1+V^2}\left\{B' + \frac{A-B}{\bar{u}+\bar{v}}\right\}^2 d\bar{v}^2 \tag{10}$$

Отметим здесь, что в переменных $\bar{u}$ и $\bar{v}$ величина r^2 записывается так

$$r^2 = \frac{k^2\,\bar{u}\cdot\bar{v}}{(1+V^2)(\bar{u}+\bar{v})^2} \tag{11}$$

Теперь нам известны все элементы, характеризующие искомые поверхности: линейный элемент дается формулой (10), затем $p = q_1 = 0$, p_1 и q определяются уравнениями (1) и (2); функция $r = -r_1$ дается формулой (6) или (11).

Для окончательного решения задачи необходимо вычислить координаты точек поверхности.

По известным величинам E, G, p, p_1, q, q_1, r, r_1 координаты точек поверхности определяются интегрированием уравнения Riccati.

В данном случае трудность интегрирования этого уравнения можно устранить, руководствуясь касательным изображением поверхностей.

Касательное изображение поверхностей играет в дифференциальной геометрии большую роль при решении целого ряда основных ее задач.

* E. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations du II-d ordre, t. II, p. 186.

Чтобы подтверить это, достаточно сослаться на последние главы трактата Darboux.

Касательное изображение позволило Darboux полностью провести исследование изотермических поверхностей с плоскими линиями кривизны. Этот же самый метод позволит довести до конца решение и нашей задачи.

4. Определение координат точек поверхности

Для определения x, y, z построим касательное изображение искомых поверхностей.

С этой целью проведем через начало координат прямую, параллельную касательной к линии $v = c$ поверхности E в произвольно выбранной точке M. Точка m встречи этой прямой со сферой радиуса 1, имеющей центр в начале координат, называется касательным изображением точки M нашей поверхности.

Обозначим через a, a', a'' косинусы углов рассматриваемой касательной с осями координат. Эти величины будут вместе с тем и координатами точки m.

При движении точки M по поверхности, точка m будет перемещаться по сфере.

Рассчитаем длину дуги, описываемой точкой m на поверхности сферы. Обозначим через dl дифференциал этой дуги, находим

$$dl^2 = da^2 + da'^2 + da''^2 \tag{1}$$

Чтобы определить dl^2 через известные нам функции, вспомним следующие уравнения кинематического метода:*

$$\begin{gathered} \frac{\partial a}{\partial u} = br - cq; \quad \frac{\partial a}{\partial v} = br_1 - cq_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{2}$$

В нашем случае эта система уравнений значительно упрощается, приводясь к виду:

$$\begin{gathered} \frac{\partial a}{\partial u} = br - cq, \quad \frac{\partial a}{\partial v} = -br \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{2'}$$

* G. Darboux, ibidem, livre VIII, ch. X.

Отсюда легко вычисляется dl^2

$$dl^2 = (r^2 + q^2)\,du^2 - 2r^2\,du dv + r^2\,dv^2$$

но

$$q = -Vr,$$

следовательно

$$dl^2 = r^2\left[(1 + V^2)\,du^2 - 2du dv + dv^2\right]$$

Придадим теперь этой квадратичной форме такой вид:

$$dl^2 = r^2\left[(1 + V^2)\left(du - \frac{dv}{1 + V^2}\right)^2 + \frac{V^2\,dv^2}{1 + V^2}\right].$$

Введем затем новое переменное t по уравнению

$$du - \frac{dv}{1 + V^2} = dt \tag{3}$$

Тогда в переменных t и v dl^2 примет следующий вид

$$dl^2 = r^2\left[(1 + V^2)\,dt^2 + \frac{V^2\,dv^2}{1 + V^2}\right]. \tag{4}$$

Пользуясь формулой (3) § 3 переписываем dl^2 так:

$$dl^2 = \frac{k^2\,e^{kt}}{(1 + e^{kt})^2}\cdot\left[dt^2 + \frac{V^2\,dv^2}{(1 + V^2)^2}\right].$$

Введем теперь новые переменные θ и φ, полагая

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = e^{\frac{kt}{2}}; \quad \varphi = \frac{k}{2}\int\frac{V dv}{1 + V^2}. \tag{5}$$

В этих переменных dl^2 примет следующий вид:

$$dl^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2. \tag{6}$$

Таким образом касательное изображение искомых поверхностей дает на сфере ортогональную сеть меридианов и параллелей. Меридианы будут соответствовать плоским линиям кривизны поверхности; этот факт, что линии кривизны $v = c$ изобразятся дугами больших кругов, легко было усмотреть с самого начала.

Из того обстоятельства, что плоские линии кривизны изображаются меридианами, следует, что все плоскости этих линий кривизны огибают некоторый цилиндр. Дальше будет дано уравнение этого цилиндра.

Вернемся к линейному элементу (6); его выражение показывает нам, что a, a', a'', необходимо должны иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} a &= \cos\varphi\sin\theta \\ a' &= \sin\varphi\sin\theta \\ a'' &= \cos\theta \end{aligned} \tag{7}$$

Чтобы определить самые координаты, нам нужно знать еще b, b', b'' — направляющие косинусы касательной к линии $u=c$.

Из формул ($2'$) следует, что

$$b = -\frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial v}, \quad b' = -\frac{1}{r}\frac{\partial a'}{\partial v}, \quad b'' = -\frac{1}{r}\frac{\partial a''}{\partial v}. \tag{8}$$

Теперь формулы

$$\begin{aligned} dx &= a\sqrt{E}du + b\sqrt{G}dv \\ dy &= a'\sqrt{E}du + b'\sqrt{G}dv \\ dz &= a''\sqrt{E}du + ''b\sqrt{G}dv \end{aligned} \tag{9}$$

дадут нам, по подстановке выражений (7), (8) и (10) § 3 искомые координаты.

Из формул (8) находим:

$$\begin{aligned} b &= \frac{\cos\varphi\cos\theta + V\cdot\sin\varphi}{\sqrt{1+V^2}} \\ b' &= \frac{\sin\varphi\cos\theta - V\cos\varphi}{\sqrt{1+V^2}} \\ b'' &= -\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+V^2}} \end{aligned}$$

С другой стороны формула (5) дает нам:

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{\bar{u}\cdot\bar{v}}}{\bar{u}+\bar{v}}; \quad \cos\theta = \frac{\bar{v}-\bar{u}}{\bar{u}+\bar{v}}.$$

С помощью всех этих формул и формулы для линейного элемента поверхности получаем:

$$\begin{aligned} x &= \int\frac{2\cos\varphi}{\bar{u}+\bar{v}}\left(A' + \frac{B-A}{\bar{u}+\bar{v}}\right)\cdot\sqrt{\frac{\bar{v}}{k}}\,d\bar{u} + \left(V\sin\varphi - \frac{\bar{u}-\bar{v}}{\bar{u}+\bar{v}}\cos\varphi\right)\left(B' + \frac{A-B}{\bar{u}+\bar{v}}\right)\frac{d\bar{v}}{\sqrt{k\bar{v}}} \\ y &= \int\frac{2\sin\varphi}{\bar{u}+\bar{v}}\left(A' + \frac{B-A}{\bar{u}+\bar{v}}\right)\sqrt{\frac{\bar{v}}{k}}\,d\bar{u} - \left(V\cos\varphi + \frac{\bar{u}-\bar{v}}{\bar{u}+\bar{v}}\sin\varphi\right)\left(B' + \frac{A-B}{\bar{u}+\bar{v}}\right)\frac{d\bar{v}}{\sqrt{k\bar{v}}} \\ z &= \int\frac{\bar{v}-\bar{u}}{\bar{u}+\bar{v}}\left(A' + \frac{B-A}{\bar{u}+\bar{v}}\right)\frac{d\bar{u}}{\sqrt{k\bar{u}}} - \frac{2}{\bar{u}+\bar{v}}\left(B' + \frac{A-B}{\bar{u}+\bar{v}}\right)\sqrt{\frac{\bar{u}}{k}}\,d\bar{v} \end{aligned} \tag{10}$$

$$z = \int\frac{\bar{v}-\bar{u}}{\bar{u}+\bar{v}}\left(A' + \frac{B-A}{\bar{u}+\bar{v}}\right)\frac{d\bar{u}}{\sqrt{k\bar{u}}} - \frac{2}{\bar{u}+\bar{v}}\left(B' + \frac{A-B}{\bar{u}+\bar{v}}\right)\sqrt{\frac{\bar{u}}{k}}\,d\bar{v}$$

Это суть окончательные выражения координат точек искомой поверхности.

Независимыми переменными здесь являются $\bar{u}$ и $\bar{v}$; A, B и V суть произвольные функции этих переменных. Параметры $\bar{u}$ и $\bar{v}$ линий кривизны не являются потенциальными; из них потенциальные параметры u и v определяются формулами

$$u = \frac{1}{k} \ln \bar{u}, \quad v = \frac{1}{k} \cdot \int (1 + V^2) \cdot \frac{d\bar{v}}{\bar{v}} \cdot$$

5. Геометрическое построение найденных поверхностей

Наша задача теперь — указать некоторые свойства полученных поверхностей и дать метод их построения.

Обратимся сначала к линейному элементу сферического изображения:

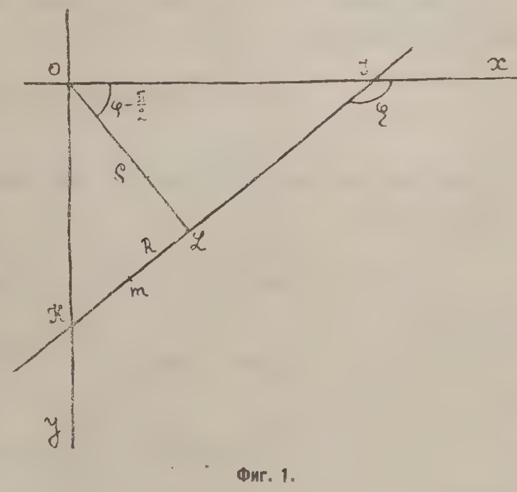
$$d\sigma^2 = q^2\, du^2 + p_1^2\, dv^2;$$

подставляя сюда вместо q и p_1 их значения (1) и (2) из § 3, мы видим, что $d\sigma^2$ не зависит от произвольных функций $A(\bar{u})$ и $B(\bar{v})$, входящих в формулы для координат точек поверхности.

Значит, при сделанном уже выборе функции V поверхности (10) § 4 имеют общее сферическое изображение линий кривизны при любых произвольных функциях $A(\bar{u})$ и $B(\bar{v})$.

Это сферическое изображение представляет собою семейство кругорадиусов $\frac{V}{\sqrt{1+V^2}}$; плоскости их параллельны оси OZ.

Выше мы видели, что плоскости линий кривизны $v = \text{const}$. огибают цилиндр. Дадим теперь уравнение этого цилиндра. С этой целью рассмотрим линию пересечения IK плоскости линии кривизны $v = \text{const}$ с плоскостью $z = 0$; назовем через φ расстояние линии IK от начала координат; обозначим далее буквой R расстояние проекции m некоторой точки M линии



Фиг. 1.

кривизны $v = \text{const.}$ от подошвы L перпендикуляра, опущенного из O на IK; угол этого перпендикуляра с осью OX будет равен $\varphi - \frac{\pi}{2}$. Из приложенного чертежа легко усмотреть, что координаты x и y определятся так:

$$
\begin{aligned}
x &= R\cos\varphi + \rho\sin\varphi \\
y &= R\sin\varphi - \rho\cos\varphi
\end{aligned} \tag{1}
$$

Найдем из этих уравнений dx и dy; получим:

$$dx = \frac{\partial R}{\partial u}\cos\varphi\, du + \left[\left(\frac{\partial R}{\partial v} + \rho\frac{d\varphi}{dv}\right)\cos\varphi + \left(\frac{d\rho}{dv} - R\frac{d\varphi}{dv}\right)\sin\varphi\right]dv$$

$$dy = \frac{\partial R}{\partial u}\sin\varphi\, du + \left[\left(\frac{\partial R}{\partial v} + \rho\frac{d\varphi}{dv}\right)\sin\varphi - \left(\frac{d\rho}{dv} - R\frac{d\varphi}{dv}\right)\cos\varphi\right]dv.$$

Сравним эти формулы с формулами (9) § 4; принимая в расчет выражения a, a'. a''; b, b'. b'' через тригонометрические функции углов θ и φ, получаем:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial u} &= \sqrt{E}\sin\theta \\
\frac{\partial R}{\partial v} + \rho\,\frac{d\varphi}{dv} &= \sqrt{G}\cdot\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+V^2}} \\
\frac{d\rho}{dv} &= R\frac{d\varphi}{dv} + \frac{V}{\sqrt{1+V^2}}\cdot\sqrt{G}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Эта система уравнений определит нам R и ρ.

Интеграцию ее удобно ввести с помощью новой функции T, определяемой соотношением:

$$T = R + \frac{2}{k}\sqrt{1+V^2}\cdot\sqrt{G} + \int \rho d\varphi \tag{3}$$

Найдем производные по u и v от этой функции.

Мы имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial R}{\partial u} + \frac{2}{k}\sqrt{1+V^2}\cdot\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \sqrt{E}\sin\theta + \frac{2}{k}\sqrt{1+V^2}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$$

но

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial v}} = \frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v} : 2\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial v}}$$

на основании же уравнения, определяющего функцию ω, это будет равно следующему

$$\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = -r\sqrt{\frac{\partial \omega}{\partial u}} = -r\sqrt{E}$$

Поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \sqrt{E}\left[\sin\theta - \frac{2}{k}\sqrt{1+V^2}\cdot r\right]$$

но

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{\bar{u}\cdot\bar{v}}}{\bar{u}+\bar{v}}; \quad r = \frac{k\sqrt{\bar{u}\cdot\bar{v}}}{\sqrt{1+V^2}\cdot(\bar{u}+\bar{v})}$$

следовательно $\frac{\partial T}{\partial u} = 0$, т. е. T есть функция лишь v.

Определим теперь $\frac{dT}{dv}$.

Из уравнения (3) мы получаем:

$$\frac{dT}{dv} = \frac{\partial R}{\partial v} + \frac{2}{k}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{1+V^2}\cdot\sqrt{G}\right) + \rho\frac{d\varphi}{dv}$$

Пользуясь средним уравнением системы (2), придаем этому соотношению такой вид:

$$\frac{dT}{dv} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+V^2}}\cdot\sqrt{G} + \frac{2}{k}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{1+V^2}\cdot\sqrt{G}\right)$$

Заменим в этом уравнении переменное v через $\bar{v}$, вводя это последнее соотношением

$$\bar{v} = exp\left(k\int\frac{dv}{1+V^2}\right)$$

После некоторых простых преобразований находим

$$\frac{dT}{d\bar{v}} = 2\sqrt{\frac{\bar{v}}{k}}\left\{\frac{\frac{\partial^2\omega}{\partial\bar{v}^2}}{2\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial\bar{v}}}} + \frac{\sqrt{\frac{\partial\omega}{\partial\bar{v}}}}{\bar{u}+\bar{v}}\right\}$$

На основании уравнения (8′) § 3 витая скобка равна $B''(\bar{v})$; итак:

$$\frac{dT}{d\bar{v}} = 2\sqrt{\frac{\bar{v}}{k}}B''(\bar{v})$$

Отсюда

$$T = 2\int\sqrt{\frac{\bar{v}}{k}}B''(\bar{v})\,d\bar{v} \tag{4}$$

Возьмем наконец последнее уравнение системы (2) и введем в него вместо R функцию T.

Получим:

$$\frac{d\rho}{dv}=\left(T-\int\rho d\varphi\right)\frac{d\varphi}{dv}+\left(\frac{V}{\sqrt{1+V^2}}-\frac{2}{k}\cdot\sqrt{1+V^2}\cdot\frac{d\varphi}{dv}\right)\sqrt{G}$$

но из уравнений (5) § 4 следует, что

$$\frac{d\varphi}{dv}=\frac{k}{2}\cdot\frac{V}{1+V^2}$$

поэтому вторая скобка обращается в нуль, следовательно:

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=T-\int\rho d\varphi$$

Дифференцируя это уравнение по φ, находим:

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}+\rho=\frac{dT}{d\varphi}$$

Откуда

$$\rho=\left(C_1-\int\sin\varphi dT\right)\cos\varphi+\left(C_2+\int\cos\varphi dT\right)\sin\varphi \qquad (5)$$

где по выполнении интеграции нужно φ заменить через

$$\frac{k}{2}\int\frac{Vdv}{1+V^2}$$

Функция T зависит лишь от произвольных функций V и $B(\bar{v})$, но не от $A(\bar{u})$, следовательно направляющая цилиндра, огибаемого плоскостями линий кривизны $v=\text{const}$ не зависит от выбора функции $A(\bar{u})$.

Найдем уравнение этой направляющей.

Уравнение плоскости линии кривизны $v=\text{const}$ пишется так:

$$x\sin\varphi-y\cos\varphi=\rho$$

Дифференцируя это уравнение по φ находим:

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi=\frac{d\rho}{d\varphi}$$

Определяя из этих двух уравнений x и y, получим таким путем параметрическое уравнение искомой кривой

$$x=\rho\sin\varphi+\frac{d\rho}{d\varphi}\cos\varphi$$

$$y=-\rho\cos\varphi+\frac{d\rho}{d\varphi}\sin\varphi$$

Подставляем сюда вместо ρ его значение из (5), получаем:

$$x = C_2 + \int \cos\varphi dT$$
$$y = -C_1 + \int \sin\varphi dT \tag{6}$$

Из этих двух уравнений следует, что T является длиною дуги направляющей цилиндра; в самом деле:

$$dx^2 + dy^2 = dT^2$$

Возвратимся опять к уравнениям (2); перепишем первые из этих уравнений, вводя вместо R новое переменное S по уравнению

$$S = R + \int \rho\, d\varphi \tag{7}$$

получим

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \sqrt{E} \sin\theta; \quad \frac{\partial S}{\partial v} = \sqrt{G} \cdot \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+V^2}} \tag{8}$$

Присоединим сюда последнее уравнение системы (9) § 4, переписанное в виде системы уравнений:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{E} \cos\theta; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\sqrt{G} \cdot \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+V^2}} \tag{9}$$

Рассмотрим теперь в плоскости $P(S, Z)$ семейство кривых, определяемых дифференциальными уравнениями (8) и (9).

Совершено ясно, что линии $v = \text{const}$ этого семейства по своей форме и по расположению относительно оси S совпадают с линиями кривизны $v = c$ исследуемой поверхности.

Составим линейный элемент $d\zeta^2$ плоскости (P) в параметрах u и v:

$$d\zeta^2 = Edu^2 + G \cdot \frac{dv^2}{1+V^2}$$

или

$$d\zeta^2 = \frac{\partial\omega}{\partial u} du^2 + \frac{\partial\omega}{\partial v} \frac{dv^2}{1+V^2} \tag{10}$$

Таким образом, кривые $u = C$ и $v = C$ образуют потенциальную систему на плоскости (P) с потенциальными параметрами u и $\frac{1}{k} l n \bar{v}$.

Это свойство позволяет дать геометрическое построение исследуемых поверхностей.

Берем произвольную цилиндрическую поверхность с образующими параллельными оси OZ.

Наносим затем на плоскость (P) семейство потенциальных кривых, определяемых уравнениями (8) и (9). Покатим теперь эту плоскость по поверхности цилиндра со скольжением, но так, чтобы начало координат плоскости (P) отстояло бы от подошвы перпендикуляра, опущенного на нее из точки O на расстояние $\int \rho d\varphi$. Выбирая в каждом положении, определяемом параметром v движущейся плоскости, соответствующую кривую этой плоскости, образовываем искомую поверхность. Если плоскость (P) двигалась бы по поверхности цилиндра без скольжения, то ее начало координат при элементарном повороте отошло бы на расстояние $dT + \rho d\varphi$ от подошвы перпендикуляра. Но в нашем случае начало координат отступает на расстояние $\rho d\varphi$; следовательно, расстояние начала координат плоскости (P) от точки ее прикосновения к направляющей цилиндра остается все время одним и тем же.

M. SRETENSKIJ (M. Srettensky). SUR LES SURFACES POTENTIELLES A LIGNES DE COURBURE PLANES

RÉSUMÉ

Une surface (S) s'appelle «surface potentielle», si son élément linéaire décrit au moyen des paramètres des lignes de courbure à la forme suivante:

$$ds^2 = \frac{\partial \omega}{\partial u} du^2 + \frac{\partial \omega}{\partial v} dv^2.$$

Les fondements de la théorie de ces surfaces ont été posés par D. Th. Egoroff. (Voir G. Darboux «Leçons sur les systèmes orthogonaux», l. III, ch. VIII, IX). Dans ce mémoire nous déterminons toutes les surfaces potentielles dont les lignes de courbure $v = C$ seraient planes.

L'application de la méthode cinématique nous permet de trouver les coordonnées cartésiennes des surfaces cherchées. Elles sont données par les formules (10) du § 4. Dans le § 5 nous donnons la construction géométrique des surfaces trouvées.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

VISUELLE MESSUNGEN DER STATISTISCHEN PHOTONENSCHWANKUNGEN

Von E. BRUMBERG und S. VAVILOV (S. Wawilow)

§ 1. Die korpuskularen Eigenschaften des Lichts im sichtbaren Gebiete wurden bis jetzt nur indirekt durch theoretische Schlussfolgerungen aus zahlreichen Versuchen bekannt; es fehlten jegliche Beobachtungen, welche die elementare Statistik in diesem Teile des Spektrums direkt nachweisen könnten. In der unlängst erschienenen Arbeit von R. Bowling Barnes und M. Czerny[1] wurde ein Versuch gemacht, die Photonenschwankungen mit dem dunkeladaptierten Auge qualitativ zu beobachten. Es ist bekannt, dass in der Nähe der Reizschwelle des menschlichen Auges, im Spektralgebiete der maximalen Empfindlichkeit, der Photonenstrom so verdünnt sein muss, dass solche Schwankungen sicher zu erwarten sind.

Derselbe Gedanke war der Ausgangspunkt der unpublizierten Versuche, die von einem von uns (W.) vor vier Jahren im Moskauer Institut für Physik und Biophysik angestellt wurden, wobei erwartet wurde, dass die statistischen Schwankungen der Einstellungen auf die Reizschwelle (mit einem Adaptometer von König) grösser im Falle einer grünen, als roten oder violetten Erregung werden müssen, da die Reizschwelle im Grünen einer viel kleineren Zahl von Photonen entspricht, als im Roten oder Violetten. Die ersten orientierenden Messreihen, die von Frau Fedorow angestellt wurden, ergaben im allgemeinen positive Ergebnisse. Der Unterschied der Amplituden der Schwankungen war aber nicht gross und ausserdem lag der Verdacht nahe, dass die ganze Erscheinung von verschiedenen psychophysiologischen Ursachen vorgetäuscht werden konnte. Aus äusseren Gründen wurden diese Versuche auf längere Zeit

[1] R. Bowling Barnes und M. Czerny. Lässt sich ein Schrotteffekt der Photonen mit dem Auge beobachten? Zs. f. Phys. 79, 436, 1932.

unterbrochen und erst neuerdings kam die Anregung zu ihrer Weiterführung von der genannten Arbeit von Barnes und Czerny.

Es scheint uns dass die Beobachtungen von Barnes und Czerny unter solchen Bedingungen stattfanden, wo es höchst schwierig war, die störenden physiologischen Umstände, welche die Verfasser selbst in ihrer Mitteilung zugeben, zu vermeiden. Eine runde Fläche von etwa 15 cm Durchmesser mit 50 kleinen darüber unregelmässig verteilten grünen strahlenden Löchern wurde in Abstand von 50 cm ohne den üblichen roten Fixationspunkt beobachtet. Das ganze Bild war periodisch nur während 0.1 sec. sichtbar, während der übrigen 0.9 sec. wurde es aber durch eine rotierende Blende abgeschirmt. Das adaptierte beobachtende Auge hatte also, mit Ausnahme der kurzen Aufblitzperioden, keinen Anhaltspunkt, und es war sicher unmöglich dasselbe ständig in unveränderter Lage festzuhalten. Durch die unwillkürlichen Bewegungen des Augapfels während der Dunkelzeit mussten aber unvermeidlich Schwankungen entstehen und zwar umso leichter, als das Sehfeld ziemlich gross ($\sim 18^\circ$) war und verschiedene Stellen der Netzhaut ganz verschiedene Dämmerungsempfindlichkeit besitzen. Die Verfasser beschreiben auch ein vereinfachtes Verfahren: «Man kann eine Dunkelkammerlampe mit einem Grünfilter nehmen, wie sie zur Entwickelung panchromatischer Platten benutzt werden. Auf das Lichtfilter gibt man erst eine dicke Lage weisses Papier, dann ein schwarzes Papier mit entsprechenden Löchern. Die Helligkeit der Löcher reguliert man mit einem Schieberwiderstand vor der Lampe und durch Abstandsänderung des Kopfes. Die Schwankungen dürfen erst nach mehreren Minuten Aufenthalt im Dunkeln wahrnehmbar werden». Der Versuch gelingt aber, wie es leicht nachzuprüfen ist, nicht nur an der Reizschwelle, sondern auch bei Helligkeiten, welche dieselbe bedeutend übersteigen. Die Erscheinung kann also wieder durch physiologische Ursachen erklärt werden. Ausserdem kann man behaupten, dass wenn alle physiologischen Einflüsse ausgeschlossen würden mit Ausnahme des einzigen, der Eigenschaft des Auges den Reiz eine bedeutende Zeit zu behalten, die Photonenschwankungen in diesen Versuchsbedingungen doch kaum sichtbar würden. Wegen der genannten Trägheit des Auges würden die physikalischen Schwankungen verwaschen und gemittelt, ebensogut wie sie gemittelt sind bei Betrachtung einer grossen leuchtenden Fläche nahe an der Reizschwelle. Eine Fläche, die von diskreten leuchtenden Löchern bedeckt ist, hat keine grossen Vorzüge in dieser Beziehung vor einer gleichmässig leuchtenden Fläche von denselben Ausmassen.

Es ist noch zu bemerken, dass die Fluktuationen strahlender Punkte im Falle von Beobachtung mit einem dunkeladaptierten Auge den Physiologen und Psychologen schon lange bekannt sind[1] und ausnahmlos immer verschiedenen physiologischen Ursachen zugeschrieben wurden.

Wie aus den Energiemessungen von Barnes und Czerny hervorgeht, wurden ihre endgültigen Beobachtungen gewiss bei solchen Intensitäten ausgeführt, wo Photonenschwankungen theoretisch mit merklichen Amplituden vorhanden sein sollen, die Bedingungen der Versuche wurden aber so gewählt, dass die physiologischen Faktoren der Schwankungen ihrerseits keineswegs als ausgeschlossen gelten können. Die physikalischen Schwankungen wurden also mehr theoretisch erraten, als experimentell nachgewiesen.

Vorliegende Arbeit hat zum Ziel die Frage über die Möglichkeit einer visuellen Beobachtung der Photonenschwankungen quantitativ zu entscheiden. Auf Grund der erhaltenen positiven Ergebnisse wurden einige Versuche gemacht, die als Verwirklichung gewisser Gedankenexperimente der Quantenphysik gelten können. Einige Folgerungen, die eine gewisse Bedeutung für die physiologische Optik und für die Photometrie von sehr schwachen Lichtquellen haben können, sind am Schlusse erörtert.

§ **2. Theorie der Versuche.** Es wird angenommen, dass die Reizschwelle des menschlichen Auges im Falle von Erregung während einer passend kurzen Zeit einer streng bestimmten Zahl der Photonen n_0 entspricht. Folgende Versuchsbedingungen sind dabei vorausgesetzt: 1) Eine quasi-monochromatische, punktförmige Lichtquelle; 2) Feste Lage des Auges, die durch einen roten Fixationspunkt und eine Kopfstütze gesichert werden kann; 3) Periodische Erregungen des Auges während genügend kurzer Zeit mit darauf folgenden dunklen Pausen (wie bei Barnes und Czerny).

Es sei n die durchschnittliche Zahl monochromatischer Photonen, die während der kurzen Zeit der Erregung das Auge trifft, und z — die wirkliche Photonenzahl, die während der gegebenen Erregung ins Auge eindringt. Es werden nun nach der Definition nur solche Szintillationen wahrnehmbar, bei welchen

$$z \geqslant n_0 \tag{1}$$

[1] Vrgl. z. B.: C. E. Ferree. The fluctuations of luminal visual stimuli of point area. Amer. Journ. of Psychology, **24**, 378, 1913, wo man auch eine zahlreiche Bibliographie über den Gegenstand finden kann.

Im Einklang mit den verschiedenen Energiemessungen der Reizschwelle wird

$$n_0 \geqslant 1 \tag{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit w dafür, dass z swischen n_0 und ∞ liegt, wird, falls (2) gültig ist:

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{n_0}^{\infty} e^{-\frac{(z-n)^2}{2n}} dz \tag{3}$$

Durch eine Substitution

$$y = \frac{z - n}{\sqrt{2n}} \tag{4}$$

erhält man:

$$w = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{y_0}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{y_0} e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{2} \tag{5}$$

wo durch φ das Gauss 'sche Integral bezeichnet ist und

$$y_0 = \frac{n_0 - n}{\sqrt{2n}} \tag{6}$$

Es wird also

$$\varphi = 1 - 2w \tag{7}$$

Der Wert von φ kann den Tabellen entnommen werden. In unseren Versuchen änderte sich die Wahrscheinlichkeit w etwa zwischen 0.15 und 0.80. In diesem Intervalle ist aber φ nur unbedeutend von y_0 verschieden, wie man aus Tabelle 1 ersehen kann. Für unsere Zwecke, wo keine grosse Genauigkeit angestrebt ist, reicht demzufolge die Annäherung:

Tabelle 1

φ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80
y_0	0.00	0.09	0.18	0.28	0.38	0.48	0.60	0.74	0.91

$$w \sim \frac{1}{2} - \frac{y_0}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{(n_0 - n)}{\sqrt{2n}}. \tag{8}$$

Es sei nun

$$n = n_0 x \tag{9}$$

wo x den Sinn eines Absorptionskoeffizienten hat und experimentell kontrollierbarerweise verändert werden kann. Nach (8) und (9) wird

$$w = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n_0}{2}}\frac{(1-x)}{\sqrt{x}} \tag{10}$$

Der Koeffizient x kann kleiner bzw. grösser als 1 werden; letzterenfalls wird die mittlere Photonenzahl n grösser als die Reizschwelle n_0; x wird gleich 1, wenn die Wahrscheinlichkeit w den Wert $\frac{1}{2}$ erreicht, wie es aus (7) und (10) hervorgeht. Diese Folgerung wird zur Ermittelung des absoluten Werts von x benutzt (vrgl. § 4).

In unseren Versuchen schwankte x höchstens zwischen 0.85 und 1.24, dementsprechend änderte sich $\sqrt{x}$ zwischen 0.92 und 1.12. Zu einer weiteren Vereinfachung der Darstellung der Ergebnisse ist also, wenn es nötig ist, eine weitere Annäherung erlaubt, die durch Ersetzen von $\sqrt{x}$ durch 1 erreicht wird. Man erhält dann nach (10)

$$w \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n_0}{2}}(1-x) \tag{10'}$$

In dem von uns betrachteten Bereiche der Veränderlichen w und x gibt es also zwischen ihnen eine sehr einfache Beziehung (10) oder (10'), die zur quantitativen Prüfung der Existenz der Photonenschwankungen herangezogen werden kann. Wenn die Vorstellung über die physikalische, quantenhaften Natur der Szintillationen richtig ist, dann muss die Wahrscheinlichkeit w des Auftretens dieser Szintillationen in den angegebenen Grenzen linear von $\frac{1-x}{\sqrt{x}}$ (oder angenähert von x) abhängen, so dass die Neigung der Geraden

$$\frac{d(w)}{d\left(\frac{1-x}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n_0}{2}} \tag{11}$$

ein richtiges Mass der Quantenzahl ergeben soll, die der Reizschwelle entspricht. Andererseits muss ein Übergang zu anderen Farben der Lichtquelle von einer solchen Änderung der Neigung der Geraden begleitet werden, die der spektralen Empfindlichkeitskurve des menschlichen Auges (im Dunkeln) und der Grösse der Lichtquanten entspricht.

Es ist leicht zu ersehen, dass die physiologischen Schwankungen, die z. B. durch Drehung des Auges, oder durch Fluktuationen der Refraktion der Augenlinse entstehen können, auf komplizierte und wenig bekannte

Weise auf n und n_0 einwirken müssen, so, dass man keinen einfachen (oder überhaupt irgendwelchen) Zusammenhang zwischen w und x und der Farbe der Lichtquelle erwarten kann.

Wir wollen noch zum Schluss die mittlere Intensität, d. h. die mittlere Zahl $\bar{n}$ der Photonen der Szintillationen bei verschiedenen x berechnen. Die Zahl $\bar{n}$ ermittelt sich, wie leicht zu ersehen aus der Formel:

$$\bar{n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{n_0}^{\infty} z \cdot e^{-\frac{(z-n)^2}{2n}} dz}{w}$$

Oder nach Ausführung der Integration und unter Benutzung der Formeln (4), (6) und (7) und (10)

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \frac{e^{-y_0^2}}{(1-\varphi)} + n \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \{\sqrt{2n_0 x} + n_0(1-x)\} + n_0 x \qquad (12)$$

Im Falle $x = 1$, also $\varphi = 0$, wird

$$\bar{n}_1 = \sqrt{\frac{2n_0}{\pi}} + n_0 \qquad (13)$$

Wir wissen schon, dass in diesem Falle die mittlere Zahl der Photonen n der Reizschwelle n_0 gleich wird. Zur anschaulichen Darstellung der Variation von $\bar{n}$ in Abhängigkeit von x bilden wir den Quotienten $\frac{\bar{n}}{\bar{n}_1}$. Da nun in unseren Versuchen $1-x$ nicht grösser als 0.2 wurde, so kann man $\sqrt{2n_0 x}$ in (12) durch $\frac{1}{2}\sqrt{2n_0} + \frac{x}{2}\sqrt{2n_0}$ ersetzen. Dann wird

$$\frac{\bar{n}}{\bar{n}_1} \simeq 1 + (x-1) \left\{ \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)}{\left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi n_0}}\right)} + \frac{1}{2\left(1 + \sqrt{\frac{\pi n_0}{2}}\right)} \right\} \qquad (14)$$

Oder, da (2) gültig ist, wird angenähert:

$$\frac{\bar{n}}{\bar{n}_1} \simeq 1 + (x-1)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \backsim 0.56 + 0.44x. \qquad (15)$$

Da in unseren Versuchen, wie es oben schon erwähnt wurde, x sich nur in den engen Grenzen zwischen etwa 1.20 und 0.85 änderte, so muss die mittlere Energie der Szintillationen beinahe konstant bleiben, wie aus (15) ersichtlich ist, zu gleicher Zeit aber ist eine sehr grosse Veränderung der Zahl der Aufblitze nach (11) zu erwarten.

§ **3.** In der Fig. 1 ist die einfache Anordnung unserer letzten endgültigen Versuche photographisch von oben aufgenommen. Um die einzelnen Gegenstände deutlicher zum Vorschein kommen zu lassen, wurden die beiden schwarzen Tische der Anordnung während der Aufnahme mit weissem Papier bedeckt. Als Lichtquelle diente eine kleine 4V. Glühlampe, die von Akkumulatoren gespeist wurde. Diese Lampe befand sich in der Laterne L_1; das Licht trat durch Milchglas, Grünfilter und eine runde Blende von 1 mm Durchmesser in das Rohr $N_1 N_2$ ein. An beiden Enden des Rohres waren zwei Polarisationsprismen aufgestellt, durch deren relative Drehung das

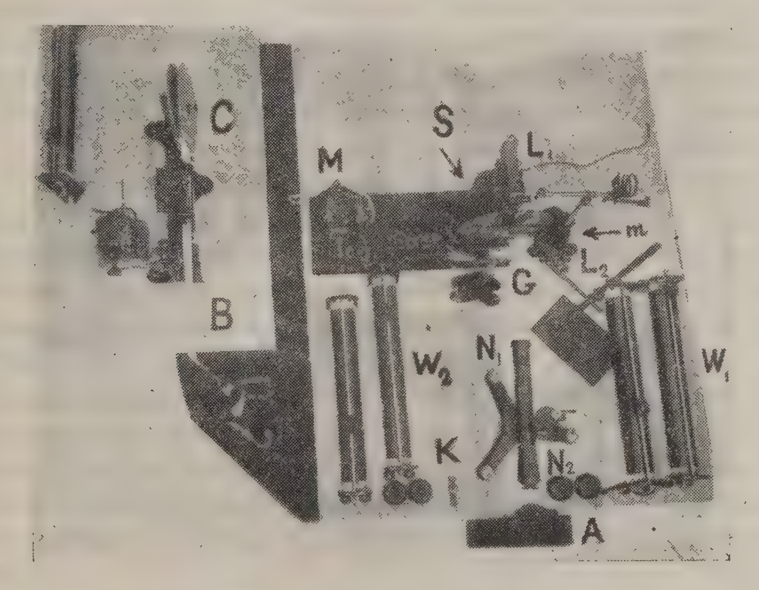


Fig. 1

Licht ohne Veränderung der spektralen Energieverteilung beliebig abgeschwächt werden konnte. Eine rotierende Scheibe S zwischen L_1 und N_1 N_2 konnte durch Synchronmotor mit Transmission langsam gedreht werden. Diese Scheibe machte 1 Umdrehung pro sec. Die Öffnung der Scheibe betrug 36°, der Mittelpunkt der Scheibe und der leuchtende Punkt befanden sich auf derselben Vertikale. Das Licht der zweiten Lampe L_2 wurde von einem kleinen Spiegel m reflektiert, der vor dem rotierenden Sektor angebracht war. Das Bild des roten leuchtenden Punktes lag in derselben Ebene wie der grüne Punkt der Lichtquelle L_2, in 60 *cm* Abstand vom Auge, ihre Strahlung wurde aber durch den Sektor nicht unterbrochen, so dass der rote Punkt, der von dem grünen für das Auge in 4° Winkelabstand sich

befand, immer sichtbar war und dementsprechend als ein Fixationspunkt gebraucht werden konnte. Zwischen dem Sektor und dem Rohr $N_1 N_2$ war noch ein veränderlicher Glasplattensatz G eingeschoben, der zu stufenmässiger Abschwächung des Lichts von der Lichtquelle L_1 diente. Man konnte sehr leicht mit diesem Lichtabschwächer im Dunkeln quantitativ tastend manipulieren. Jede Glasplatte verminderte die Lichtstärke infolge der Reflexion um 7 Proz., wie durch photometrische Messungen gefunden wurde. Am zweiten Tisch war ein astronomischer Chronograph CB aufgestellt mit einer Spule C mit Papierband und elektrisch regulierten Federn. Diese Federn wurden mit dem rotierenden Sektor S so verbunden, dass jeder Umdrehung des Sektors eine mit Tinte gemachte automatische Zeitmarke auf dem Papierband B entsprach. Vermittels des Schlüssels k auf dem ersten Tisch konnte der Beobachter am anderen Rande des vorwärts schreitenden Papierbandes seine Zeitmarken auftragen.

Die Versuche wurden folgendermassen ausgeführt. Der Vorgang der Dunkeladaptation des Beobachters dauerte etwa eine volle Stunde. Zur Verfolgung der verschiedenen Stadien der Adaptation erwiesen sich Uranylsalzkristalle als sehr nützlich. Dank der Radioaktivität des Urans sind Uranylsalze immer durch ihre eigenen radioaktiven Strahlen angeregt und geben ein schwaches Licht, das aber mit einem dunkeladaptierten Auge ganz deutlich sichtbar ist. Die Intensität dieser Strahlung ist bei verschiedenen Uranylsalzen sehr verschieden, so dass man leicht eine Helligkeitsstufenleiter aus verschieden Salzen zusammenstellen kann. Mit einem ganzadaptierten Auge sieht man z. B. das eigene Licht von Uranglas. Wir beabsichtigen auf diese Luminesszenzerscheinung an anderer Stelle zurückzukommen.

Das Kinn des Beobachters wird durch eine spezielle Unterlage A unterstüzt. Durch die beiden Polarisationsprismen N_1 und N_2 sieht das Auge die beiden leuchtenden Punkte L_1 und L_2. Die Helligkeit der beiden Punkte wird vermittels der Polarisationsprismen und teilweise durch die Widerstände W_1, W_2 reguliert. Das Auge ist immer auf den roten Punkt fixiert, so dass das grüne Licht nur peripherisch angesehen wird.[1] Es ist eine gewisse Übung nötig um das Auge wirklich auch in Anwesenheit des Fixationspunktes festzuhalten. Eine grosse Rolle spielt auch der Zustand des Beobachters (Ermüdung, Vor- und Nachmittagszeit u. s. w.). Besonders störend bei den Versuchen wirkt das sogenannte Eigenlicht der Netzhaut, d. h. die hellen Wolken, die vor dem Auge in Dunkeln schweben. Diese Erscheinung

[1] Man kann zweifellos eine grössere Empfindlichkeit bei grösserem Abstand des Fixationspunktes, als bei uns, erreichen. Das war aber experimentell wenig bequem.

ist auch in hohem Masse vom Zustand des Beobachters abhängig und man muss für die Versuche solche Zeiträume auswählen, wo sie fehlt oder unwesentlich ausgesprochen ist. Alle endgültigen Messungen wurden von einem von uns (B) ausgeführt. Um eine etwaige Selbstsuggestion zu vermeiden, blieben die Ergebnisse und die Einzelheiten der Berechnungen dem Beobachter lange Zeit unbekannt.

Indem der Sektor S in Rotation versetzt wird, versucht der Beobachter mit dem immer auf den roten Punkt gerichteten Auge das intermittierende Licht des grünen Punktes (der bei diesen Bedingungen farblos erscheint, während der rote Punkt seine Farbe wesentlich behält) bis an die Reizschwelle herabzusetzen. Das erste neue qualitative Resultat bestand nun darin, dass dieses eigentlich nicht erreichbar ist!

Man sieht anfangs je eine Szintillation bei jedem Durchgang des Sektors. Wenn man aber die Helligkeit dieser Szintillationen weiter zu verringern sucht, sieht man, dass es unausführbar ist. Es vermindert sich die Zahl der Szintillationen, d. h. nicht jedem Durchgang des Sektors entspricht jetzt ein Aufblitz, aber die Helligkeit dieser Szintillationen verkleinert sich, wenigstens augenscheinlich, nicht. Wenn man durch Einschieben neuer Glasplatten in G die «mittlere Lichtstärke» allmählich weiter herabsetzt, werden die Aufblitze viel seltener und endlich verwandeln sie sich in eine äusserst seltene Erscheinung, die nur mit grosser Anstrengung zu beobachten ist.

Die quantitative Operation des Beobachters besteht darin, dass er jeden Aufblitz auf dem Papierband des Chronographs vermittels des Schlüssels k markiert. Nachdem eine genügende Anzahl solcher Marken erreicht ist, wird eine neue Glasplatte in den Plattensatz G eingeschoben und die Szintillationen werden von neuem abgezählt und markiert. Um eine Dokumentation dieser Art mit 4—5 Glasplatten zu erhalten, braucht man nach der erreichten stationären Adaptation etwa 1—2 Stunden. Die Zeitmarken an beiden Rändern des Papierbandes ergeben alles erforderliche zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit w des Auftretens von Aufblitzen. Diese Wahrscheinlichkeit wird durch den Quotienten aus der Zahl der Aufblitze (die Zeitmarken an einem Rande) zu der Zahl der Durchgänge des Sektors (die Zeitmarken am anderen Rande) ausgedrückt. Die Zahl der eingeschobenen Glasplatten ergibt andererseits ein Mass für x, oder für die mittlere Photonenzahl, die jedem Durchgang des Sektors entspricht.

Für Versuche mit rotem bzw. violettem Licht wurde das Grünfilter in L_1 durch andere Lichtfilter ersetzt. Das Durchlässigkeitsgebiet des roten

Filters lag etwa zwischen 650—600 $m\mu$, das des grünen zwischen 520—490 $m\mu$, das des violetten zwischen 460 und 425 $m\mu$. Die Verwendung einer *Hg*- Lampe in unseren Versuchen war unmöglich wegen der unvermeidlichen Schwankungen der Intensität dieser Lichtquelle. Die kurzdauernden Schwankungen im Betrag von einigen Prozenten müssten die Resultate ganz verfälschen.

§ **4. Ergebnisse.** A) *Statistische Unordnung der Szintillationen.* Jedes Papierband des Chronographs enthält die unregelmässigen Zeitmarken der Aufblitze und die regelmässigen Marken der periodischen Durchgänge des Sektors. In der Fig. 2 ist ein Ausschnitt eines solchen Bandes abgebildet. Die erste Probe, der diese Dokumente unterworfen werden müssen, ist die Kontrolle der wirklichen Unordnung der Verteilung der Marken. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, dann müssen gewisse systematische Einflüsse an der Erscheinung mitwirken.

Fig. 2

Die Wahrscheinlichkeit, dass während des gegebenen Durchgangs ein Aufblitz stattfindet sei w. Die Wahrscheinlichkeit p_n, dass auf einen Aufblitz n Durchgänge ohne Aufblitz und ein Durchgang mit Aufblitz folgen, lautet:

$$p_n = (1 - w)^n w$$

oder

$$\log p_n = n \log (1 - w) + \log w.$$

Diese Formel kann zur Kontrolle der statistischen Unordnung der Szintillationen gebraucht werden. Wenn a_n die Zahl der Zwischenräume ist, die n dunklen Durchgängen auf dem Papierbande entspricht, so wird

$$p_n = \frac{a_n}{\sum a_n}.$$

Wenn man nun p_n aus dem gegebenen Papierband ermittelt und die erhaltenen Zahlen logarithmiert, so muss man im Falle der statistischen Unordnung bei graphischer Darstellung eine Gerade erhalten. Bei allen auf diese Weise bearbeiteten Bändern war das auch immer der Fall, wie aus

Tabelle 2

a	0	1	2	3	4	5	6	Zahl der Durchgänge: 352
a_n	64	60	28	11	4	2	1	$\sum a_n = 170$
p_n	0.38	0.35	0.17	0.06	0.02	0.01	0.005	$w = \frac{171}{352} = 0.48$

einem Beispiel ersichtlich ist (Tab. 2 und Fig. 3). Aus der Neigung der Geraden der Fig. 3 erhält man für w den Wert 0.52, ausserdem berechnet sich w nach dem Schnittpunkte der Geraden mit der Ordinatenaxe zu 0.50. Der direkt berechnete Wert von w war 0.48. Es lassen sich also die Punkte auf dem Chronographenbande als statistisch ungeordnet ansehen.

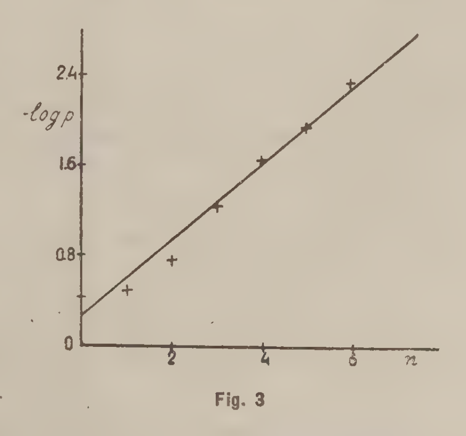


Fig. 3

B) *Zusammenhang zwischen w und x.* In den endgültigen Versuchen wurden ingesamt 5 grosse Serien von Beobachtungen gemacht, in welchen die Abhängigkeit der Anzahl der Szintillationen von der Anzahl der eingeschobenen Glasplatten bestimmt wurde. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 3 bis 7 zusammengestellt. In der ersten Spalte G ist die Anzahl der aus dem Glasplattensatz herausgeschobenen Platten angeführt, in der zweiten Spalte α sind die entsprechenden relativen Extinktionskoeffizienten zusammengestellt, indem der Ausgangsstellung der Wert 1 willkürlich zugeordnet ist. In der dritten und vierten Spalten befinden sich die Werte von x und $\frac{1-x}{\sqrt{x}}$. Die Methode, nach der x ermittelt wurde, ist weiter beschrieben. In der fünften Spalte $\mathfrak{N}$ ist die Anzahl der Szintillationen angeführt und in der sechsten N — die Gesamtzahl der Durchgänge. In der letzten Spalte befinden sich endlich die Werte von

$$w = \frac{\mathfrak{N}}{N}.$$

Tabelle 3

Grünfilter

G	α	x	$\frac{1-x}{\sqrt{x}}$	$\mathfrak{N}$	N	w
4	1.00	1.08	—0.077	48	69	0.69
3	0.93	1.01	—0.010	66	114	0.58
2	0.86	0.93	0.072	80	218	0.37
1	0.80	0.87	0.138	33	171	0.19

Tabelle 4

Grünfilter

G	α	x	$\frac{1-x}{\sqrt{x}}$	$\mathfrak{N}$	N	w
6	1.00	1.24	—0.215	37	38	1.00
5	0.93	1.16	—0.148	26	32	0.81
4	0.86	1.08	—0.077	35	80	0.44
3	0.80	1.00	0.000	48	111	0.43
2	0.75	0.96	0.073	44	142	0.31
1	0.70	0.93	0.139	65	327	0.20

Tabelle 5

Grünfilter

G	α	x	$\frac{1-x}{\sqrt{x}}$	$\mathfrak{N}$	N	w
4	1.00	1.11	—0.104	55	63	0.88
3	0.93	1.04	—0.039	70	125	0.56
2	0.86	0.96	+0.041	61	155	0.39
1	0.80	0.89	+0.117	57	236	0.24

Tabelle 6

Grünfilter

G	α	x	$\frac{1-x}{\sqrt{x}}$	$\mathfrak{N}$	N	w
5	1.00	1.11	—0.104	79	100	0.79
4	0.93	1.04	—0.039	72	155	0.46
3	0.86	0.96	0.041	56	175	0.32
2	0.80	0.89	0.117	61	197	0.31
1	0.75	0.83	0.188	45	240	0.19

Tabelle 7

Grünfilter

G	α	x	$\frac{1-x}{\sqrt{x}}$	$\mathfrak{N}$	N	w
4	1.00	1.04	—0.039	133	207	0.64
3	0.93	0.97	0.030	136	320	0.43
2	0.86	0.90	0.105	79	476	0.17
1	0.80	0.84	0.173	64	540	0.12

Alle 5 Tabellen beziehen sich auf Beobachtungen mit Grünfilter. Der direkten Messung zugängliche Werte von α, die photometrisch ermittelt wurden, fallen noch mit x nicht zusammen. Da x nach (9) gleich $\frac{n}{n_0}$ ist, so wird

$$x = \frac{n}{n_0} = \frac{n'}{n_0}\alpha$$

wo n' die durchschnittliche Zahl der Photonen in Abwesenheit der abschwächenden Glasplatten ist. Zur Ermittelung des Proportionalitätsfaktors $\frac{n'}{n_0}$ kann man die Beziehung benutzen (vrgl. § 2), nach der im Falle

$$n = n_0 \quad w = \frac{1}{2}.$$

Falls diese Wahrscheinlichkeit erreicht ist, wird

$$\frac{n'}{n_0}\alpha_0 = 1.$$

oder der Extinktionskoeffizient α_0, welcher der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entspricht, ist dem umgekehrten Werte des betreffenden Proportionalitätsfaktors gleich. Zur Berechnung von x verfährt man folgendermassen. Man trägt die gefundenen Werte von w graphisch auf in Abhängigkeit von der Anzahl der Glasplatten und nach der Interpolationskurve (die immer durch eine Gerade dargestellt werden konnte) findet man den Extinktionskoeffizienten, der dem Werte von $w = \frac{1}{2}$ entspricht. Für die Tab. 3 ist diese Operation in der Fig. 4 angegeben. Die erste Grösse in den Spalten x der Tab. 3—7 ist zahlenmässig dem Proportionalitätsfaktor $\frac{n'}{n_0}$ gleich. Wie ersichtlich, war diese Grösse immer nur wenig von 1 verschieden, was durch eine geeignete Wahl der Anfangsbedingungen der Versuche sich erklärt.

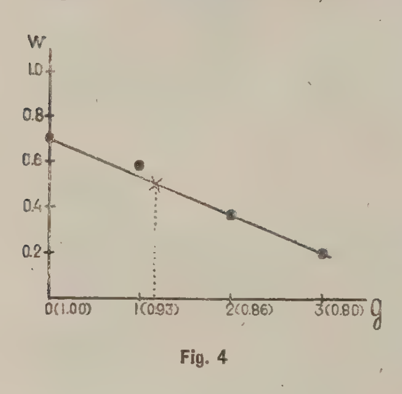


Fig. 4

Die Resultate der Tab. 3—7 sind in den Fig. 5—9 dargestellt. Man sieht daraus, dass obwohl in einigen Fällen eine bedeutende Dispersion der Punkte vorhanden ist, dieselben trotzdem zweifellos einen

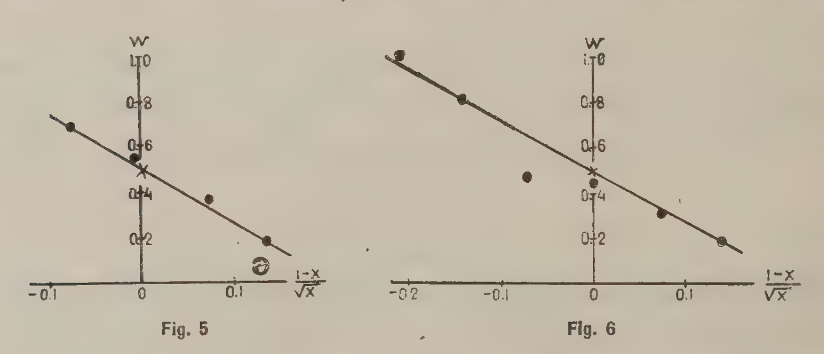


Fig. 5

Fig. 6

linearen Zusammenhang von w und $\frac{1-x}{\sqrt{x}}$ befolgen, im Einklang mit der theoretischen Formel (10). Es sei bemerkt, dass alle Geraden notwending bei $\frac{1-x}{\sqrt{x}} = 0$ durch $w = \frac{1}{2}$ gehen müssen, was die Willkür bei der Ziehung der Geraden beschränkt. Die grossen Abweichungen der einzelnen Punkte, wie, z. B., in der Fig. 6 oder 8 können selbstverständlich durch

manche physiologische Umstände, sowie auch physikalische Störungen (z. B. eine vorübergehende Inkonstanz der Lichtquelle) erklärt werden. Es ist umgekehrt verwunderlich, dass in den meisten Fällen die Punkte so gut sich der Geraden anschmiegen. Aus der Neigung der Geraden kann nun nach (11) die Photonenzahl n_0 berechnet werden, die der Reizschwelle des

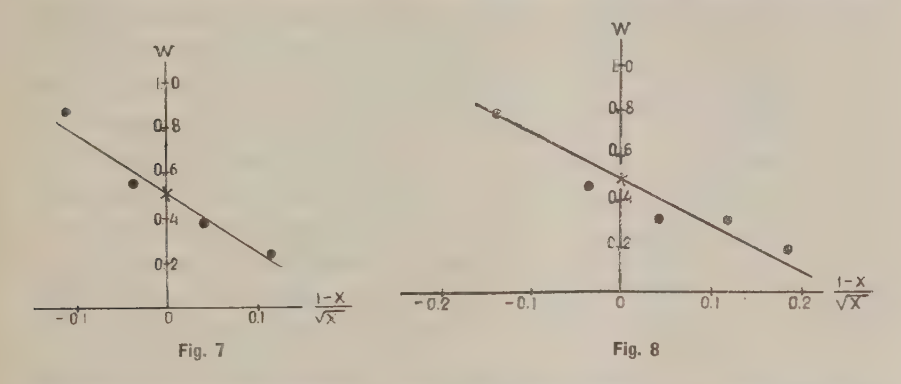


Fig. 7 Fig. 8

Beobachters im blau-grünen Teile des Spektrums (bei etwa $510 m\mu$) entspricht. In der Tab. 8 sind die Werte von

$$k = \frac{dw.}{d\left(\frac{1-x}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n_0}{2}}$$

zusammengestellt, die den Fig. 5—9 entsprechen. Die Tabelle zeigt nun

Tabelle 8

№ der Figur	k	n_0
5	2.4	46
6	2.2	40
7	2.7	56
8	2.2	40
9	2.6	54
Mittel	2.4	47

erstens, dass die Reizschwelle des Beobachters (B) bei verschiedenen Messungen, die während eines Monats zu verschiedenen Tageszeiten ausgeführt wurden, ziemlich konstant blieb. Die absolute Zahl n_0 der

Photonen stimmt gut mit den letzten Energiemessungen von Barnes und Czerny überein, die für Verhältnisse, die den unserigen ähnlich sind (Löcher von 0.4—2 *mm* Durchmesser, $\lambda \backsim 530 m\mu$, die Anregung während 0.1 sec.), die Reizschwelle zu 40—90 Photonen schätzen.[1]

C. *Die Reizschwelle als Funktion der Wellenlänge.* Da die Empfindlichkeit des menschlichen Auges hin nach den längeren und kürzeren Wellenlängen sehr schnell abfällt, so ist für die quantitativen Versuche in diesen Teilen des Spektrums eine monochromatische Lichtquelle unentbehrlich. Mit unserer Anordnung konnten wir daher nur qualitative orientierende Versuche am Spektrum vornehmen. Diese Versuche bestätigten die Erwartungen vollkommen. Wenn mit Rotfilter die Lichtstärke der Lampe so temperiert wurde, dass beinahe jedem Durchgang des Sektors ein Aufblitz entsprach, so reichte schon eine einzige eingeschobene Glasplatte um die Wahrscheinlichkeit w praktisch bis auf 0, oder höchstens auf 0.01 herabzudrücken, was theoretisch einer sehr grossen Photonenzahl n_0 nach der Formel (11) entspricht. Das Auge ist also im roten Teile des Spektrums im kritischen Gebiete nahe an der Reizschwelle zu den kleinsten Änderungen der Lichtintensität empfindlich. Ähnliche Resultate wurden auch mit dem violetten Filter erhalten, wie aus Tab. 9 ersichtlich ist.

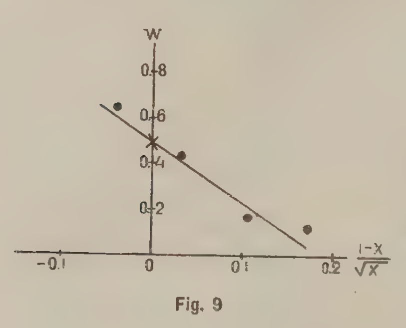


Fig. 9

Tabelle 9

Violettfilter

G	α	$\mathfrak{N}$	N	w
3	1.00	32	38	0.84
2	0.93	14	64	0.22
1	0.86	5	86	0.06

Die Zahl der Beobachtungen war ungenügend um daraus bestimmte quantitative Schlüsse, wie im Falle des Grünfilters, ziehen zu können. Es lässt

[1] Durch Verbindung unserer Photonenzählung mit Energiemessung kann man prinzipiell die Konstante h ermitteln.

sich nur sagen, dass die Neigung der Geraden hier zwischen 6 und 7 liegt und dementsprechend die Zahl der Photonen n_0 280—650 beträgt.

Man kann noch in diesem Zusammenhang erwähnen, dass sich ähnliche Resultate auch mit Grünfilter erhalten lassen, wenn das Auge nicht vollkommen adaptiert ist. Ein solcher nicht vollkommen adaptierter Zustand des Auges kann stationär erhalten werden, wenn das Zimmer periodisch auf kurze Zeit mit einem schwachen Licht beleuchtet wird. Ein solcher Versuch ergab z. B. mit Grünfilter, dass die Wahrscheinlichkeit w durch eine eingeschobene Glasplatte von 1 bis praktisch 0 herabgesetzt wurde.

Alle in diesem Paragraphen dargelegten Versuche bestätigen befriedigend die im § 2 skizzierte Theorie und beweisen also die Möglichkeit der visuellen Beobachtungen der quantenhaften Schwankungen des Lichtstroms.

§ 5. **Die relativen Schwankungen der verschiedenen Strahlen.** Nachdem die beschriebene Methode direkter visueller Messung der Photonenschwankungen geprüft war, schien es uns von Interesse vor allem diese Methode zur Untersuchung der kohärenten Strahlen zu verwenden. Es ist bekannt, dass das Interferenzbild bei schwächsten Intensitäten photographiert werden kann. Dieses Resultat scheint wellentheoretisch selbstverständlich und vom Standpunkte der reinen Korpuskulartheorie ganz unbegreiflich. Die weiter beschriebenen Versuche zeigen nun *ad oculos*, dass die Interferenz bei kleinen Intensitäten auch vom Standpunkte der Wellentheorie ebenso unbegreiflich ist.

Die Versuchsanordnung blieb dieselbe wie in der Fig. 1 mit dem einzigen Unterschied, dass zwischen dem rotierenden Sektor und dem Rohr $N_1 N_2$ noch ein Fresnel'sches Biprisma mit horizontal gerichteter brechender Kante aufgestellt war. Es erschienen also im Sehfelde zwei kohärente grüne Punkte, die symmetrisch zum roten Fixationspunkt R angeordnet sind. (Fig. 10).

R

Fig. 10

Bei der Schwellenintensität fluktuierten nun die beiden Punkte ganz deutlich relativ zu einander, so dass es selten genug vorkam, dass sie zu derselben Zeit sichtbar wurden. Diese Erscheinung der relativen Schwankungen der kohärenten Strahlen erscheint für die klassische Wellentheorie der Interferenz zweifellos als ganz fatal. Der Versuch lässt nur die einzige Deutung zu, dass jeder Strahl mit sich selbst interferiert! Wenn Fresnel diese, sonst so leicht reproduzierbare Erscheinung, hätte beobachten können, so hätte natürlich das Schicksal der Lichttheorie eine ganz andere Wendung genommen!

Wir haben die Erscheinung auch quantitativ untersucht, indem nach obiger Methode die Wahrscheinlichkeit P eines gleichzeitigen Autblitze der beiden Punkte bestimmt wurde. Wenn den beiden Punkten dieselbe mittlere Zahl von Photonen entspricht, so wird es klar, dass nach dem Theorem der Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten

$$P = w^2$$

oder nach (10)

$$\sqrt{P} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n_0}{2}}\frac{(1-x)}{\sqrt{x}}. \tag{16}$$

In der Tab. 10 sind die Ergebnisse einer Messreihe zusammengestellt, die Bezeichnungen sind dieselben, wie vorher.

Tabelle 10

Grünfilter

G	α	x	$\frac{1-x}{\sqrt{x}}$	$\mathfrak{N}$	N	P	$\sqrt{P}$
3	1.00	1.04	—0.039	40	107	0.37	0.61
2	0.93	0.97	0.030	35	201	0.17	0.41
1	0.86	0.90	0.105	14	155	0.09	0 30

Fig. 11

In der Fig. 11 sind die Resultate graphisch aufgetragen. Man erhält in Übereinstimmung mit (16) eine Gerade, deren Neigung $k = 2.3$, was $n_0 = 43$ Photonen im Einklang mit der Tabelle 8 entspricht.

Ein ähnlicher Versuch wurde auch mit dem Wollastonschen Prisma gemacht, auf welches das natürliche Licht der Lichtquelle fiel. Die beiden grünen Punkte in diesem Versuche waren nun linear, in zwei zueinander senkrechten Ebenen, polarisiert.

Es erwies sich wie vorher, dass die beiden Punkte relativ zu einander fluktuierten. Diese Beobachtung lässt sich nun dahin deuten, dass das statistisch natürliche Licht bei genügend kleiner Intensität immer auf die eine oder andere Weise polarisiert ist. Es ist zu betonen, dass diese Tatsache ganz und gar von der wellentheoretisch möglichen «elemen-

taren Polarisation» verschieden ist, die nur während eines äusserst kurzen Zeitabschnitts beobachtet werden könnte. In unserem Versuche dauerte der bestimmte polarisierte Zustand des natürlichen Lichts wenigstens 0.1 sec.

Auch in diesem Falle wurden Messungen der Wahrscheinlichkeit P gleichzeitigen Aufblitzens der beiden Punkte in Abhängigkeit von x vorgenommen. Die Ergebnisse eines solchen Versuchs sind in der Tab. 11 zusammengestellt und in der Fig. 12 graphisch aufgetragen. Hier ebenfalls ist das lineare Gesetz zwischen $\sqrt{P}$ und $\frac{1-x}{\sqrt{x}}$ befolgt und die Neigung der Geraden $k = 2.5$, was 50 Photonen entspricht.

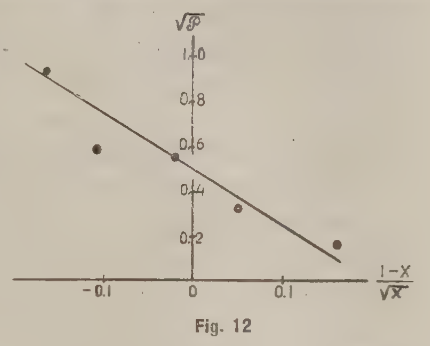


Fig. 12

Tabelle 11

Grünfilter

G	α	x	$\frac{1-x}{\sqrt{1-x}}$	$\mathfrak{N}$	N	P	$\sqrt{P}$
5	1.00	1.18	—0.165	56	66	0.85	0.92
4	0.93	1.01	—0.103	25	71	0.35	0.59
3	0.86	1.02	—0.02	30	100	0.33	0.57
2	0.80	0.95	+0.05	15	136	0.11	0.33
1	0.75	0.85	+0.16	4	108	0.036	0.19

Man könnte ähnliche Versuche mit den relativen Schwankungen von verschiedenen Strahlen noch mannigfaltig variieren. Zum Beispiel es wäre ebenso leicht die relativen Fluktuationen der beiden Spektra der ersten Ordnung eines Diffraktionsgitters zu beobachten, was bedeuten würde, das ein Diffraktionsbild nicht gleichzeitig überall entsteht, sondern nur allmählich statistisch zustande kommt. Man könnte die relativen Schwankungen der benachbarten Spektrallinien desselben Spektrums verwirklichen, was dem statistischen Sinne der spektralen Energieverteilung entsprechen würde. Es lohnt sich kaum alle diese Variationen der oben angeführten Versuche zu multiplizieren, da sie alle logisch demselben empirisch bewieenen Prinzip entspringen, das etwa so formuliert werden kann: Jeder

Strahl bei genügend kleiner Intensität weist die statistischen Schwankungen auf, die vollkommen spontan und unabhängig von den Schwankungen in irgend welchem anderen Strahl sich vollziehen.

§ **6. Physiologische und photometrische Folgerungen.** Da alle Eigenschaften des Lichts nur durch dessen Wirkungen auf stoffliche Empfänger festgestellt werden können, so erscheint es prinzipiell unmöglich durch irgend ein Experiment zu entscheiden, wo die eigentliche Ursache der beschriebenen Schwankungen liegt, im Lichtstrom oder im Empfänger? Es lässt sich nur behaupten, dass alle Lichtwirkungen von diesen Schwankungen begleitet sind, die quantitativ einen universellen quantenhaften Charakter aufweisen.

Ausser diesem physikalischen Schluss ergeben die beschriebenen Versuche einige Folgerungen, die für die physiologische Optik von Interesse werden können und vielleicht als Ausgangspunkt einer neuen Methode der physiologisch-optischen Forschung gebraucht werden dürfen.

Wenn man mit einer punktförmigen intermittierenden Lichtquelle arbeitet, wie es bei uns der Fall war, so wird die Reizschwelle, streng genommen, eine experimentell unerreichbare Grösse. Bei der Abnahme der Energie des Lichtstroms verändert sich die Helligkeit der Szintillationen merklich nicht, nur die Zahl dieser Szintillationen vermindert sich dabei sehr bedeutend. Die Reizschwelle n_0 lässt sich also in diesen Bedingungen direkt energetisch nicht bestimmen, wenigstens mit einer annehmbaren Genauigkeit. Die einzige Methode, n_0 zu ermitteln sind die statistischen Zählungen, von der Art der von uns gebrauchten. Nach dieser Weise andererseits lässt sich hoffentlich die ganze Kurve der spektralen Dämmerungsempfindlichkeit des Auges bestimmen und zwar mit Vorteil die Zahl der Photonen finden, die wirklich an der Reizschwelle in der Netzhaut absorbiert sind; alle Energieverluste, die durch Reflexion, Absorption und Zerstreuung im Augapfel entstehen und die alle energetischen Methoden notwendig beeinträchtigen, fallen in den statistischen Messungen automatisch fort. Nach dieser Methode kann man wahrscheinlich die interessante Frage entscheiden über die wirkliche Empfindlichkeit der lebendigen Netzhaut im langwelligen Ultraviolett. Es ist bekannt, dass die ultravioletten Strahlen im Spektralbereiche von 400 bis etwa 310 $m\mu$ bei grosser Intensität derselben sichtbar sind und es ist noch eine offene Frage, ob die kleine Empfindlichkeit des Auges in diesen Gebieten durch eine wirkliche Unempfindlicheit der Netzhaut oder durch die Absorption in den Medien des Augapfels sich erklärt.

Die am Ende des § 4 dargelegten Versuche mit roten bzw. violetten Strahlen sind für die physiologische Optik von Interesse, da sie eine unerwartet scharfe Grenze der wirklichen Reizschwelle n_0 zum Vorschein bringen.

Die meisten Messungen der Reizschwelle beziehen sich auf die ausgedehnten dauernd leuchtenden Flächen, also auf die Bedingungen, bei welchen die statistischen Schwankungen verwaschen bleiben müssen. In unseren Versuchen waren die Winkeldimensionen der Lichtquelle (6′) noch gross genug und es wäre interessant diese Messungen mit der Lichtquelle zu wiederholen, deren Dimensionen einem einzigen Elemente der Netzhaut entsprechen würden.

Die Beständigkeit der Reizschwelle des Beobachters während der Versuche von langer Dauer ermöglicht die Anwendung des Auges als eines höchst empfindlichen Instruments im sichtbaren Teile des Spektrums zur Bestimmung der relativen Intensität äusserst schwacher Lichtquellen, sowie der zeitlichen Veränderung derselben. Im Falle dauernder Beobachtung einer genügend ausgedehnten Fläche (was immer z. B. durch eine Defokussierung des optischen Systems verwirklicht werden kann), wenn also die statistischen Schwankungen praktisch ausgeschlossen sind, kann die Methode in einer besonders einfachen Form angewandt werden. Man braucht dazu nur die Lichtquelle mit einer messbar veränderlichen Vorrichtung (z. B. mit einem Graukeil) gerade bis an die Reizschwelle abzuschwächen. Jede Veränderung der Intensität der Lichtquelle wird demgemäss eine entsprechende Veränderung der Einstellung des Messgeräts hervorrufen. Da nun das Auge im grünen Teile des Spektrums viel empfindlicher, als jegliche bis jetzt vorgeschlagene Empfänger (Photoelement mit Spritzenzähler eingeschlossen) ist, so kann man nach dieser Weise mit einfachsten Mitteln die schwächsten Lichtintensitäten messen. Diese Methode wurde von einem von uns schon vor mehreren Jahren[1] verwendet und kann zweifellos mit grossen Nutzen bei Studium der Lumineszenzerscheinungen, in der astronomischen Photometrie, z. B. bei Messungen der veränderlichen Sterne und auf anderen Gebieten gebraucht werden. Wir beabsichtigen an einer anderen Stelle zur ausführlichen Beschreibung der Methode zurückzukehren. Es ist ersichtlich zu derselben Zeit, dass das Auge als ein absolutes Instrument für Energiemessungen einigermassen Verwendung finden kann.

[1] S. I. Wawilow. Die Absorption des Lichts der kleinsten Intensitäten. Nachr. des Physik. Inst., 1, 96, 1920 (russisch).

Eine andere merkwürdige Eigenschaft des Auges, die für feinste Messungen ausgenutzt werden kann, besteht in der praktischen Unstetigkeit der Reizfunktion. Wie wir sahen (§ 4) reicht im kritischen Intensitätengebiete des roten und des violetten Spektrums, schon eine Änderung des Extinktionskoeffizienten um einige Prozente, um die Wahrscheinlichkeit w der Szintillationen von 1 bis etwa 0.01 herabfallen zu lassen. Es ist nun leicht ersichtlich, dass diese Erscheinung eine Möglichkeit gibt die winzigsten Variationen der Absorption und der Intensität des heraustretenden Lichts im allgemeinen zu beobachten und zu messen.

Zusammenfassung

1. Nach einer kritischen Einleitung (§ 1) ist die Theorie einer Methode angegeben, die visuelle Messungen der Photonenschwankungen zu verwirklichen erlaubt (§ 2).

2. Die Versuche bestätigen die Theorie, indem die theoretische Beziehung (11), welche die Wahrscheinlichkeit w der Lichtszintillationen mit dem Extinktionskoeffizienten x vermittels der Zahl der Photonen n_0 der Reizschwelle verbindet, sich nach verschiedenen Seiten als erfüllt erwiesen hat (§§ 3, 4).

3. Die Methode wird weiter (§ 5) zum experimentellen Nachweis der relativen Schwankungen der kohärenten Strahlen und der polarisierten Komponenten des natürlichen Lichts quantitativ angewandt.

4. Zum Schluss werden physiologisch-optische Folgerungen der Versuche erörtert und zwei neue Prinzipien der absoluten Photometrie für schwächste Intensitäten vorgeschlagen (§ 6).

Staatl. Optisches Institut in Leningrad
Juli 1933.

Е. М. БРУМБЕРГ и С. И. ВАВИЛОВ

ВИЗУАЛЬНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ ПОТОКА ФОТОНОВ

РЕЗЮМЕ

1. Постоянство порога зрительного раздражения для данного наблюдателя во время опыта и крайне малая энергетическая величина порога применены для количественного измерения флуктуаций светового потока. После критического введения (§ 1) в статье дана теория метода (§ 2).

2. Опыты вполне подтвердили теорию. Теоретическая формула (10), связывающая вероятность w световых вспышек с коэффициентом экстинкции x посредством порожного числа фотонов n_0, подтвердилась во всех отношениях (§§ 3, 4).

3. Метод применен далее (§ 5) для экспериментального обнаружения относительных флуктуаций двух когерентных лучей и поляризованных компонентов естественного света. Теоретические предположения подтверждены и с количественной стороны.

4. В заключение рассмотрены некоторые выводы, имеющие значение для физиологической оптики и предложены два новых принципа абсолютной фотометрии для чрезвычайно слабых интенсивностей (§ 6).

Государственный
Оптический институт.
Ленинград, июль 1933 г.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles | Отделение математических и естественных наук

STABILITÄT ECHTECKIGER PLATTEN, DIE DURCH EINZELKRÄFTE GEDRÜCKT WERDEN

Von A. FILIPPOV (A. Philippoff)

(Présenté par A. Krylov, *membre de l'Académie)*

Das Problem der Stabilität einer rechteckigen Platte, die durch zwei entgegengesetzte Kräfte gedrückt wird, wurde schon von Prof. A. Sommerfeld * und Prof. S. Timoschenko ** behandelt worden.

Im folgenden wird die Stabilität rechteckiger Platten, die durch mehrere Einzelkräfte gedrückt werden behandelt.

§ **1.** Eine rechteckige Platte sei durch Kontur

$$x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b$$

begrentzt und an den Rändern $y=0$, $y=b$ durch entgegengesetzte Einzelkräfte P_1, $P_2, \ldots, P_n$, die in Punkten $x_1=a_1$; $x=a_2, \ldots, x=a_n$ angreifen gedrückt.

Die Ränder der Platte $y=0$ und $y=b$ seien gestützt. Eine angenäherte Lösung des Problems bekommen wir, ausgehend aus der Differenzialgleichung der gebogenen Plattenfläche, die an den Rändern $y=0$, $y=b$ durch gleichmässig verteilte Last T gedrückt wird,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=-\frac{T}{C}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{1}$$

wo w — die Durchbiegung der Platte, $C=\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$ (h — die Plattendicke, δ — Poisson's Koeffizient).

* Über die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen. Z. f. Math. u. Phys., 1906, Bd. 54.

** Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Z. f. Math. u. Phys., 1910, Bd. 58.

Um eine Lösung zu bekommen, nehmen wir an, dass die Last T durch die ganze Länge der Seiten $y = 0$ und $y = b$ gleich Null sei, die Intervalle von a_1 bis $a_1 + \varepsilon_1$ von a_2 bis $a_2 + \varepsilon_2$ von a_n bis ε_n ausgenommen.* In diesen Intervallen nehmen wir an T als gleichmässig verteilt und entsprechend gleich $T_1, T_2, \ldots, T_n$ per Längeneinheit, wobei die Einzellasten als Grenzlagen der gleichmässig verteilten Lasten $T_1, T_2, \ldots$ betrachtet seien, in der Annahme, dass

$$T_i \varepsilon_i \to P_i, \text{ wenn } \varepsilon_i \to 0.$$

Da wir die Plattenränder $y = 0$, $y = b$ als gestützt annehmen, so nehmen wir die Lösung der Gleichung (1) in der Form

$$w = \mathrm{X}(x) \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{2}$$

wo $\mathrm{X}(x)$ durch Gleichung $\left(\beta_n = \frac{n\pi}{b}\right)$

$$\mathrm{X}^{\mathrm{IV}} - 2\beta_n^2 \mathrm{X}'' + \beta_n^4 \mathrm{X} = \frac{T}{C} \beta_n^2 \mathrm{X} \tag{3}$$

bestimmt wird.

Die Lösung der Gleichung (3) ist

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_1(x) + \mathrm{X}_2(x),$$

wo X_1 — die Lösung der Gleichung (3) ohne die Rechte Seite ist

$$\mathrm{X}_1 = A_n sh\beta_n x + B_n ch\beta_n x + C_n x sh\beta_n x + D_n x ch\beta_n x. \tag{4}$$

Die Lösung der Gleichung mit der rechten Seite $\mathrm{X}_2(x)$ bei Randbedingungen für $x = 0$

$$\mathrm{X}_2(0) = 0, \ \mathrm{X}_2'(0) = 0, \ \mathrm{X}_2''(0) = 0, \ \mathrm{X}_2'''(0) = 0 \tag{5}$$

aus der symbolischen Gleichung $(p\mathrm{X}_2 = \mathrm{X}_2')$

$$p^4 \mathrm{X}_2 - 2\beta_n^2 p^2 \mathrm{X}_2 + \beta_n^4 \mathrm{X}_2 = \frac{T}{C} \beta_n^2 \mathrm{X} \tag{3'}$$

bestimmt wird.

Daraus folgt

$$\mathrm{X}_2(x) = \frac{T}{4C\beta_n} [\beta_n (p + \beta_n)^{-2} + \beta_n (p - \beta_n)^{-2} + (p + \beta_n)^{-1} - (p + \beta_n)^{-1}] \mathrm{X}.$$

* Im Ferneren wird der Übergang zu den Einzelkräften nach der Methode von Akademiker A. N. Kryloff ausgeführt. A. Kryloff «Berechnung des Trägers auf elastischer Unterlage» 931 (russisch).

Deuten wir die symbolischen Ausdrücke $(p \pm \beta_n)^{-2} XT$, $(p \pm \beta_n)^{-1} XT$ als entsprechende Differenzialgleichungen, so bekommen wir die Lösung der Gleichung (3) mit der rechten Seite

$$X_2(x) = \frac{1}{2C}\int_0^x \Phi(x-t)\, T X(t)\, dt, \tag{6}$$

wo

$$\Phi(x-t) = (x-t)\, ch\beta_n(x-t) - \frac{1}{\beta_n} sh\beta_n(x-t)$$

ist.

Im Falle, wo auf die Platte nur zwei entgegengesetzte Kräfte P_1 im Punkte a_1 einwirken, so haben wir

$$T = 0 \text{ für } 0 \leqq x \leqq a_1 \text{ und } a_1 + \varepsilon_1 \leqq x \leqq a_1$$

das heisst

$$\begin{aligned} X_2 = \varphi(x; a_1) + \varphi_1(x; a_1) &= \frac{1}{2C}\int_{a_1}^{a_1+\varepsilon_1} \Phi(x-t)\, T_1 X_1(t)\, dt + \\ &+ \frac{1}{2C}\int_{a_1}^{a_1+\varepsilon_1} \Phi(x-t)\, T_1 X_2(t)\, dt \end{aligned} \tag{7}$$

wo durch $\varphi(x; a_1)$ der Wert des ersten Integrals, durch $\varphi_1(x; a_1)$ der Wert des zweiten Integrals bezeichnet werden.

Im Grenzwerte als $\varepsilon_1 \to 0\, (T_1 \varepsilon_1 \to P_1)$ erhalten wir die Lösung der Gleichung mit der rechten Seite bei zwei entgegengesetzten im Punkte $x = a_1$ angreifenden Kräften in der Form:

$$X_2 = \varphi(x; a_1) =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ für } 0 \leqq x \leqq a_1, \\ \frac{P_1}{2C}\left[(x-a_1)\, ch\beta_n(x-a_1) - \frac{1}{\beta_n} sh\beta_n(x-a_1)\right] X_1(a_1) \text{ für } a_1 \leqq x \leqq a \end{cases} \tag{8}$$

da das zweite Integral* der Ordnung $M_1 T_1 \varepsilon_1^2 \exp \frac{T_1 M \varepsilon_1}{2C}$ ist (wo M, M_1 begrenzt sind) und dem Null zustrebt, als $\varepsilon \to 0$ und $T_1 \varepsilon_1 \to P_1$.

* Für den oberen Grenzwert der Funktion

$$X_2(t) = \varphi(t, a_1) + \frac{T}{2C}\int_{a_1}^{t} \Phi(t-\xi)\, X_2(\xi)\, d\xi \, (a_1 \leqq t \leqq a_1 + \varepsilon_1)$$

unter dem Integralzeichen im Ausdruck $\varphi_1(x; a_1)$ kann man den Wert $\delta \exp \frac{T\delta_1 \varepsilon_1}{2C}$ nennen, wo δ und δ_1 die oberen Grenzwerte $|\varphi(t, a_1)|$ und $|\Phi(t-\xi)|$ im Intervalle $a_1 \leqq t \leqq a_1 + \varepsilon_1$ sind.

Im Falle mehrerer Einzelkräfte wird die Lösung der Gleichung (3') mit der rechten Seite die Form annehmen:

$$X_2(x) = 0 \text{ für } 0 \leqq x \leqq a_1, \; X_2(x) =$$

$$= \frac{P_1}{2C}\Phi(x - a_1) X_1(a_1) \text{ für } a_1 \leqq x \leqq a_2,$$

(8')

$$X_2(x) = \frac{P_1}{2C}\Phi(x - a_1) X_1(a_1) +$$

$$+ \frac{P_2}{2C}\Phi(x - a_2)[X_1(a_2) + X_2(a_2)] \text{ für } a_2 \leqq x \leqq a_3 \ldots$$

und

$$X_2(x) = \frac{1}{2C}\sum_i^{1,n} \Phi(x - a_i)[X_1(a_i) + X_2(a_i)]$$

für das letzte Intervall $a_n \leqq x \leqq a$.

Die sukzessiven Ableitungen der Funktion $X_2(x)$ einschliesslich bis zur dritten Ordnung werden durch direktes Differenzieren der Funktion $X_2(x)$ bestimmt.*

So wird die allgemeine Lösung der Gleichung (1)

(2') $$w = [X_1(x) + X_2(x)] \sin\frac{n\pi y}{b}$$

§ **2.** Durch Unterordnen des Wertes w laut (2') den Randbedingungen für $x = 0$ und $x = a$ in Abhängigkeit von der Einklemmungsart der Platte

(a) $$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{für den gestützten Rand,}$$

(b) $$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{für den gespannten Rand,}$$

(c) $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \sigma)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2} = 0 \quad \text{für den freien Rand,}$$

gelangen wir zu einen System homogener Gleichungen im Bezug auf Integrationskonstanten.

Wenn wir für diese homogene Gleichung, die aus den Koeffizienten der Konstanten A, B, C, D zusammengesetzte Determinate gleich Null

* Das kann man auch für den Fall, wenn die Funktion T eine unterbrochene ist, prüfen indem man aus der direkten Bestimmung der Ableitung ausgeht und den Ausdruck für $X_2(x)$ laut (6) benutzt, z. B., A. Kryloff, l. c., S. 39—42.

setzten, so bekommen wir eine Gleichung für die Bestimmung der Knicklast für P_i $\left(\text{in Abhängigkeit von } \alpha_1 = \frac{P_1}{P_i},\ \alpha_2 = \frac{P_2}{P_i} \dots \alpha_n = \frac{P_n}{P_i}\right)$, bei der die Platte aufhört stabil zu sein und eine ausgebeulte Form annimmt.

§ **3.** Betrachten wir jetzt einige Sonderfälle.

1⁰. Eine Platte mit gestützten Rändern $x = 0$ und $x = a$ sei durch vier entgegengesetzte gleichen Kräfte gedrückt. Die Kräfte sollen in den Punkten $x = a_1$ und $x = a_2 = a - a_1$ angreifen.

Die Lösung der Gleichung (1) wird:

$$w = X_1 \sin\frac{n\pi y}{b} = (A_n sh\beta_n x + D_n x ch\beta_n x)\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad \text{für } 0 \leqq x \leqq a_1$$

$$w = X(x)\sin\frac{n\pi y}{b} = \left[X_1(x) + \frac{P}{2C}\Phi(x - a_1)X_1(a_1)\right]\sin\frac{n\pi y}{b},$$

$$\text{für } a_1 \leqq x \leqq a_2$$

(9)

$$w = \Big\{X_1(x) + \frac{P}{2C}\Phi(x - a_1)X_1(a_1) +$$

$$+ \frac{P}{2C}\Phi(x - a_2)\left[X_1(a_2) + \frac{P}{2C}\Phi(a_2 - a_1)X_1(a_1)\right]\Big\}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

$$\text{für } a_2 \leqq x \leqq a$$

Indem wir die allgemeine Lösung (9) der Bedingungen a) für $x = a$ unterordnen, bekommen wir für die Bestimmung der Knicklast P die Gleichung

$$\Big\{\frac{1}{2}\left[\mu_2 - \mu_1 - \mu\frac{shn\pi(\mu_2 - \mu_1)}{shn\pi\mu}\right]^2 + \Big[\mu_2 - \mu_1 - \frac{\operatorname{ctg} hn\pi\mu}{n\pi} +$$

$$+ \frac{(\mu_2 - \mu_1)\, shn\pi(3\mu_1 - \mu_2)}{shn\pi\mu} +$$

(10) $$+ \frac{ch(3\mu_1 - \mu_2)n\pi}{n\pi shn\pi\mu}\Big]\left[\mu_1 - \frac{1}{2}\operatorname{tg} hn\pi\mu_1\left(\frac{1}{n\pi} + \mu\operatorname{ctg} hn\pi\mu\right)\right]\Big\} b^2 P^2 +$$

$$+ \Big[2\mu_1\frac{shn\pi(\mu_2 - \mu_1)}{shn\pi\mu} + 2\mu\frac{sh^2 n\pi\mu_1}{sh^2 n\pi\mu} - \frac{1}{n\pi}\operatorname{ctg} h\pi\mu +$$

$$+ \frac{chn\pi(\mu_2 - \mu_1)}{n\pi shn\pi\mu}\Big] 4bCP + 8C^2 = 0$$

wo

$$\mu_1 = \frac{a_1}{b}, \quad \mu_2 = \frac{a_2}{b} = \mu - \mu_1, \quad \mu = \frac{a}{b}$$

bezeichnet.

Im Sonderfall, wenn die Kräfte P sich der Mitte nähern, bekommen wir den bekannten Wert der Knicklast P_k' für eine Platte, die in der Mitte durch Kräfte $P' = 2P$ gedrückt wird*

$$(11) \qquad P_k' = \frac{4n\pi C}{b} \frac{1}{tgh\frac{n\pi\mu}{2} - \frac{n\pi\mu}{2ch^2\frac{n\pi\mu}{2}}}.$$

Mit wachsendem μ strebt die kritische Knicklast P_k' laut (11) dem Grenzwerte $P_k' = \frac{4\pi C}{b}$ zu, wobei der kleinste Wert P_k' für $a > b$ bei $n = 1$ erhalten wird.

2°. Eine Platte mit eingespannten Rändern $x = 0$, $x = a$ befindet sich unter der Einwirkung von entgegengesetzten Kräften, die im Punkte $x = a$ angreifen. Indem wir die Lösung der Gleichung (2) den Bedingungen b) unterordnen, bekommen wir zur Bestimmung der Knicklast P_k die Gleichung

$$(12) \qquad \Big[\frac{1}{2} sh\, 2n\pi\mu - sh\, n\pi\mu\, ch\, n\pi(\mu - 2\mu_1) - 2n\pi\mu_1\, sh\, n\pi(\mu - 2\mu_1)\, sh\, n\pi\mu - n^2\pi^2\mu_1^2\, sh\, 2n\pi(\mu - \mu_1) - n^2\pi^2(\mu - \mu_1)^2 sh\, 2n\pi\mu_1 - 2n\pi\mu sh^2 n\pi\mu_1 + 2n^3\pi^3\mu\mu_1(\mu - \mu_1)\Big] P = \frac{4n\pi C}{b}(sh^2 n\pi\mu - n^2\pi^2\mu^2)$$

Im Sonderfall, wenn $\mu_1 = \frac{\mu}{2}\left(a_1 = \frac{a}{2}\right)$, bekommen wir den Wert der Knicklast für eine Platte, die in der Mitte, durch zwei entgegengesetzte Kräfte P gedrückt wird, in der Form:

$$(13) \qquad P_k' = \frac{4n\pi C}{b} \frac{tg\, hn\pi\mu - \frac{2\mu^2 n^2\pi^2}{sh\, 2n\pi\mu}}{1 - \frac{2 + n^2\pi^2\mu^2}{2ch\, n\pi\mu} - \frac{n\pi\mu}{sh\, n\pi\mu} + \frac{2n\pi\mu + n^3\pi^3\mu^3}{sh\, 2n\pi\mu}}$$

Mit wachsendem μ bekommen für den kleinsten Wert von P_k den früheren Wert $\frac{4\pi C}{b}(n = 1)$.

3°. Eine Platte mit freien Rändern $x = 0$ und $x = a$ sei durch zwei entgegengesetzte im Punkte $x = \frac{a}{2}$ angreifende Kräfte P gedrückt. Indem

* Siehe S. Timoschenko, l. c., S. 358.

die Bedingungen c) für $x=0$ und $x=a$ befriedigt werden, bekommt man für P_k den Wert

$$(14)\quad P=\frac{4n\pi C}{b}\,\frac{\operatorname{tg} h n\pi\mu-\dfrac{2(1-\sigma)^2 n^2\pi^2\mu^2}{(3+\sigma)^2\, sh\, 2n\pi\mu}}{1+\dfrac{(1-\sigma)\,n\pi\mu}{(3+\sigma)\, sh\, n\pi\mu}+\dfrac{2(5+2\sigma+\sigma^2)+(1-\sigma)^2 n^2\pi^2\mu^2}{2(1-\sigma)(3+\sigma)\, ch\, n\pi\mu}+\dfrac{2(5+2\sigma+\sigma^2)n\pi\mu+(1-\sigma)^2 n^3\pi^3\mu^3}{(3+\sigma)^2\, sh\, 2n\pi\mu}}$$

Im Sonderfall mit wachsendem μ, wird P_k dem Werte $(n=1)\,\frac{4\pi C}{b}$ zustreben.

§ **4.** Im Vorhergehenden wurde angenommen, dass die gebogene Plattenfläche durch die Formel (2) bestimmt war.

Wie die Berechnungen zeigen, wird der kleinste Wert für P_k laut den Formeln (11), (13) erhalten, wenn $n=1$ für $a>b$.

Laut der Formel (14) wird der kleinste Wert von P_k auch für $a<b$ erhalten.

Die Berechnungen nach den Formeln (11), (13) und (14) zeigen, dass mit wachsender Plattenlänge (μ) P_k rasch den Grenzwerten $\frac{4\pi C}{b}$ zustrebt: so, für $a=3b$ sind die P_k entsprechend:

$$(15)\quad P_k=1.002\,\frac{4\pi C}{b},\quad P_k=1.009\,\frac{4\pi C}{b},\quad P_k=0.9978\,\frac{4\pi C}{b}(\sigma=0.3)$$

Unter Einwirkung auf die Platte von vier entgegengesetzten Kräften für lange Platten im Falle einer grossen Entfernung der Kräfte von den Rändern $x=0$ und $x=a$ und der Plattenmitte nähert sich P_k dem Grenzwerte $\frac{4\pi C}{b}$, was einer langen Platte, die nur durch zwei entgegengesetzte Kräfte gedrückt wird, entspricht. So, z. Beispiel, für

$$\mu=4.5,\ \mu_1=1.5,\ \mu_2=3.0$$

der kleinste Wert der Knicklast wird

$$P_k=0.955\,\frac{4\pi C}{b}$$

sein.

Um das Stabilitätsproblem zu lösen, benutzten wir die Differenzialgleichung (1). Da diese Gleichung die Dehnungsänderungen in der Plattenebene nicht berücksichtigt, so muss man erwarten, dass der wirkliche Wert von P_k sich etwas von den von uns erhaltenen Werten unterscheiden wird.

А. П. ФИЛИППОВ. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК, СЖАТЫХ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ

РЕЗЮМЕ

Рассматриваем устойчивость прямоугольной пластинки, ограниченной контуром $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, стороны которой $y=0$, $y=b$ оперты, находящейся под действием взаимно противоположных сил P_1, $P_2 \ldots$, приложенных в точках $x=a_1$, $x=a_2 \ldots$ по сторонам $y=0$, $y=b$; силы лежат в серединной плоскости пластинки. Решение соответствующего уравнения (1) получается с помощью метода акад. А. Н. Крылова в форме (8).

Для нескольких частных случаев $\Big($четыре взаимно противоположных силы в точках $x_1=a_1, x_2=a_2=a-a_1$ — стороны оперты, две силы — стороны $x=0$, $x=a$ закреплены, две силы в точке $x_1=\frac{a}{2}$ — стороны $x=0$, $x=a$ свободны$\Big)$. $P_{кр.}$ определяется из (10), (12), (14).

Вычисления показывают, что для длинных пластинок при двух сосредоточенных силах $P_k \cong \frac{4\pi C}{b}$, так, когда $a=3b$, P_k соответственно определяется согласно (15); при четырех силах, когда силы сравнительно далеко друг от друга и от сторон

$x=0$, $x=a$ $P_k \cong \frac{4\pi C}{b}$ $\left(\text{для } a=4.5b,\ a_1=1.5b,\ a_2-a_1=1.5b\ P_k=\frac{0.955}{b}4\pi C\right)$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ANWENDUNGEN DER THEORETISCHEN HYDRODYNAMIK AUF DIE THEORIE DES EBENEN DIFFUSORS VOM KAPLANSCHEN TYPUS[1]

Von P. WALTHER

(*Presenté par* S. Čaplygin, *membre de l'Académie*

I. In diesem Artikel betrachten wir die Anwendungen der Flügeltheorie bei der Berechnung der hydraulischen Maschinen. Das Thema ist sehr inhaltreich, und wegen Zeitmangels, wollen wir nichts über die Gittertheorie sagen, die in den grundlegenden Arbeiten von Prof. S. A. Tschaplygin und D. König behandelt wird. Ebenso lasse ich die Theorie des Kreisgitters beiseite und nenne nur die Arbeiten von Spannhake, Buseman und meine eignen. Endlich schweige ich über die Turbinenschachttheorie, denn diese Frage wird in meinen Arbeiten, die in den Memoiren des Z. A. H. I. (Zentrales Aerohydrodynamisches Institut in Moskau) № 44, 50 und 68 abgedruckt sind, auseinandergesetzt. Heute wollen wir nur über die Anwendungen der von der gegenwärtigen Aerodynamik entwickelten Methoden auf die Diffusorentheorie sprechen.

Es sei G Gebiet, welches in der Ebene z von den Diffusorwänden begrenzt wird und C der Punkt, der mit dem Zentrum entweder der Turbine, oder der Pumpe zusammenfällt und der die komplexe Koordinate $z = z_1$ hat. Dann muss man eine Strömung im Gebiete G suchen, welche im C eine Quelle von der Stärke Q und einen Wirbel von der Zirkulation J hat. Natürlich ist Q gleich der Wassermenge pro Sekunde, welche entweder eine Turbine oder eine Pumpe abgibt, und die Zirkulation J, wenn sie von Null verschieden sei, entspricht dem abnormalen Arbeitsregime desselben Maschinenwerkes.

[1] Der Inhalt dieses Artikels wurde am 7. Mai 1931 auf der Sitzung der Maschinensektion der hydraulischen Tagung der Sowjetunion vorgetragen.

Die Strömung, welche die angegebenen Eigenschaften hat, ist vollständig bestimmt und zur Auffindung dieser Strömung genügt es die analytische Funktion

$$\zeta = f(z) \tag{1}$$

zu kennen, welche das Gebiet G der Ebene z auf einen Kreis mit dem Radius 1 in der Ebene ζ konform abbildet.

Tatsächlich: wählen wir diese Abbildung so, dass die Punkte $\zeta = \zeta_1$ und $\zeta = 1$ der ζ-Ebene dem Zentrum der Turbine $C(z = z_1)$ und beziehungsweise dem Punkte $z = \infty$, der auf der Grenze des Gebietes G liegt, in der z-Ebene entsprechen. Dann soll die Strömung, welche wir nach der Abbildung in der ζ-Ebene bekommen, erstens, in $\zeta = \zeta_1$ eine Quelle von der Stärke Q und einen Wirbel mit der Zirkulation J haben, zweitens, die Flüssigkeitsmenge Q, welche sie (die Strömung) vom Punkte $\zeta = \zeta_1$ bekommt, im $\zeta = 1$, wo sie eine Senke hat, abgeben. Ausserdem soll der Rand des Kreises $|\zeta| = 1$ eine ihrer Strömungslinien sein. Somit ist aber diese neue Strömung vollkommen bestimmt und wir kennen die ihr entsprechende komplexe Funktion:

$$\begin{aligned} \varphi + i\psi = \frac{Q - iJ}{2\pi} \log(\zeta - \zeta_1) - \frac{Q}{\pi} \log(\zeta - 1) + \\ + \frac{Q + iJ}{2\pi} \log(\zeta - \zeta_1^*) + \text{const}, \end{aligned} \tag{2}$$

wo

$$\zeta_1^* \bar{\zeta}_1 = 1. \tag{2'}$$

Es ist also nur noch nötig die unbekannten Werte ζ_1 und ζ_1^* zu finden[1] und die Strömung in die Ebene des Diffusors wieder zu übertragen.

II. Eine praktische Anwendung dieser Lösung bekommen wir vor allem, wenn wir den Kaplans'diffusor betracten, der auf Fig. 1 gezeigt wird. Dieser Diffusor (Kaplans Krümmer) ist aus zwei Teilen zusammengesetzt: aus dem oberen vertikalen «Rohr» und aus dem unteren horizontalen «Schlauche». Das vertikale «Rohr» hat einen kreisförmigen Querschnitt; die Querschnitte des «Schlauchs» sind viereckige (siehe in Fig. 1 den Querschnitt $n'n'$). Ein derartiger Diffusor wird heutzutage in dem Turbinenbau als Saugrohr gebraucht.

[1] In vielen Fällen ist uns sogar ζ_1 gegeben, da sie dem Zentrum der Turbine oder Pumpe entspricht. Zuweilen aber ist die Frage nicht so einfach, wie es auch dem Leser aus dem Folgenden klar werden muss.

Im Folgendem nehmen wir an, dass die Strömung in ihm überall ein Geschwindigkeitspotential hat, ausser einem Wirbelfaden, der von der Nabe des Turbinenrades abläuft und sich irgend einer Strömungslinie entlang strecken muss. Eine solche Strömung kann sich in dem Kaplanschen Diffusor zweierart gestalten.

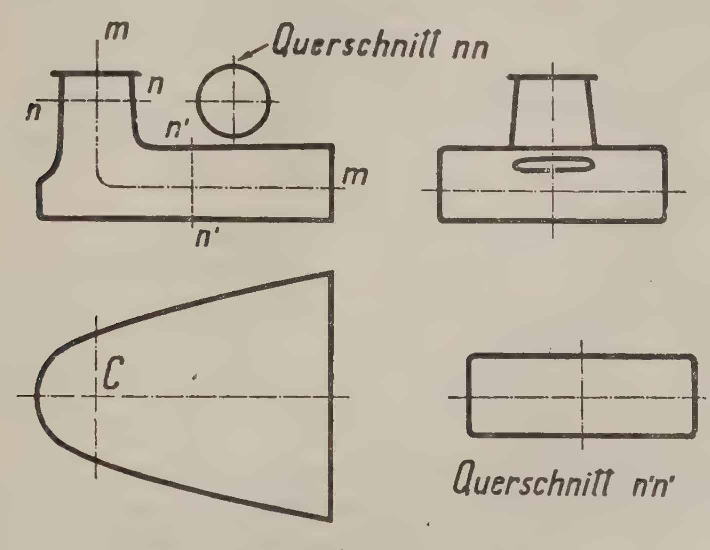


Fig. 1.

Erstens kann die ganze Strömung sich in der Weise biegen, wie es in der Fig. 2 schematisch dargestellt wird. Dabei wird die zentrale Strömungslinie *kk* dem Krümmer entlang gekrümmt (vergleiche sie mit der Kurve *mm* in Fig. 1) und die anderen Strömungslinien winden sich um die zentrale Linie herum.

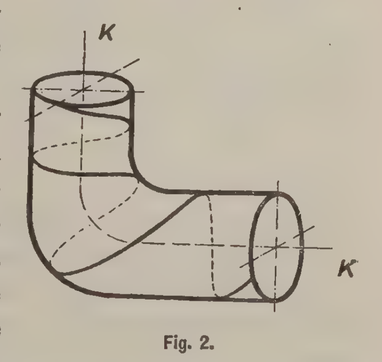


Fig. 2.

Der Wirbelfaden, welcher von der Nabe des Turbinenrades abläuft, fällt in dieser Strömung mit der Linie *kk* zusammen. Vielleicht geht die Bewegung ein wenig unstationär vor sich. Dann schwankt der Wirbelfaden um die Kurve *kk* und alle anderen Strömungslinien tun dasselbe: jede um ihrer mittlern Lage.

Um die zweite Art von Strömung in dem Kaplanschen Diffusor sich besser vorzustellen, wollen wir von einer schematischen Beschreibung aus-

gehen. Zu diesem Zwecke zeigen wir auf der Fig. 3 den Querschnitt *nn* (siehe dazu Fig. 1), welchen wir mit der Hilfe von zwei konzentrischen Kreisen in drei flächengleiche Stücke teilen wollen: zwei Ringe und eine zentrale Scheibe. Dementsprechend wird die ganze Strömung in drei elemen-

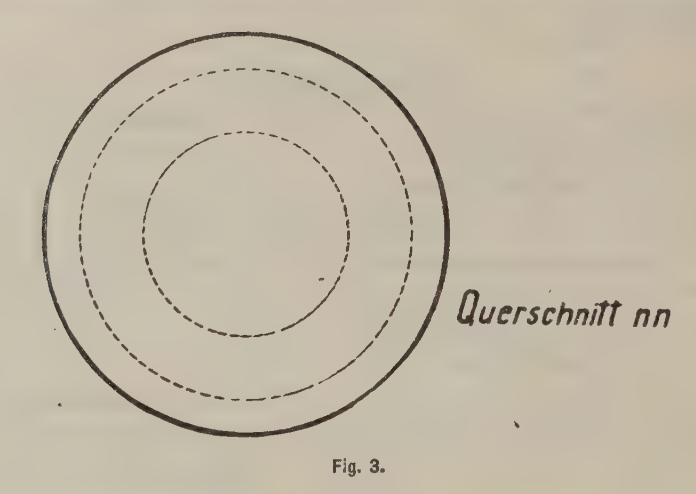


Fig. 3.

are Strömungen geteilt: eine aus diesem Strömungen wird mit den Strömungslinien gebildet, welche die zentrale Scheibe kreuzen, die zwei anderen bekommen wir, indem wir die Strömungslinien vereinigen, die durch den mittleren bzw. äusseren Ring hindurchgehen. Es möge die erste von diesen elementaren Strömungen Zilinderströmung und die zwei anderen Ringströmungen heissen.

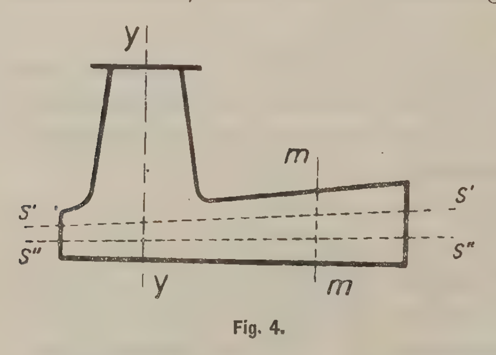


Fig. 4.

Da die Strömungsgeschwindigkeiten in verschiedenen Punkten des Querschnittes *nn* annähernd gleich sind, so tragen die elementaren Strömungen beinahe gleiche Wassermengen. Die Erscheinung vereinfachend sagen wir: sie tragen gleiche Wassermengen.

Wenden wir uns jetzt an die Strömung im horizontalem Schlauche. Dazu teilen wir diesen Schlauch durch zwei fast parallelen Ebenen $s' s'$ und $s'' s''$ in drei volumengleiche Schichten, wie es in Fig. 4 gezeigt ist. Diese Ebenen können nicht streng parallel sein, denn gewöhnlich erweitert sich der untere Schlauch ein wenig auch in der vertikalen Richtung.

Es ist leicht zu verstehen, dass die Ebenen $s's'$ und $s''s''$ den Schlauchquerschnitt mm in drei flächengleiche Streifen teilen.

Die zweite Art der Strömung im Kaplanschen Diffusor bekommen wir, wenn wir veraussetzen, dass die erste (zentrale) elementare Strömung (Zilinderströmung) sich nicht der Krümmerachse entlang biegt, sondern an den Boden gelangt, sich dort platt schlägt und in die Strömung, welche in der unteren Schicht herrscht, sich verwandelt.

Es ist nicht schwer zu verstehen, dass diese letzte Strömung sich nach dem Schema der Fig. 5 vollzieht. Sie (die Strömung) ist genau dieselbe, wie sie uns die Gleichung (2) giebt.

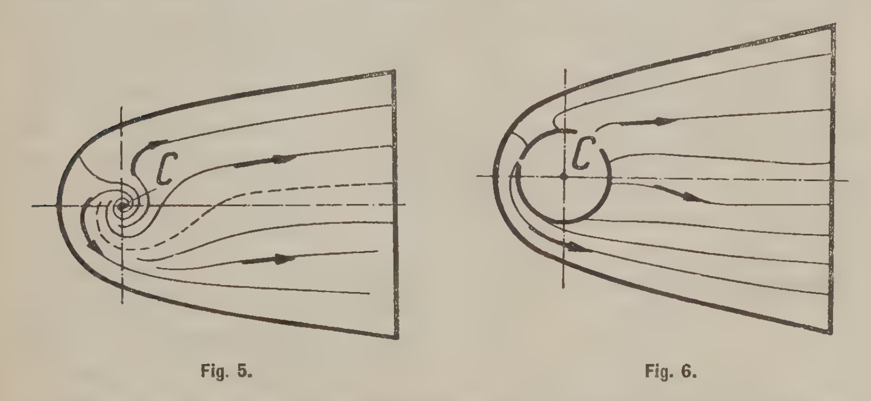


Fig. 5. Fig. 6.

Dabei können wir anfangs voraussetzen, dass die Lage des Punktes C mit dem Kreuzungspunkte der Linie yy der Fig. 4 und des Krümmerbodens zusammenfällt.

Ebenso verwandelt sich die zweite elementare Strömung (Ringströmung) in eine ebene Strömung, die sich in der zweiten horizontalen Schicht nach dem Schema der Fig. 6 vollzieht. Diese Strömung können wir ebenso leicht, wie die Strömung der Gleichung (2) bekommen, indem wir in der ζ-Ebene nicht nur eine sondern mehrere (sogar unendlich viele) Quellen setzen. Diese Quellen sind auf dem Kreise verteilt, dessen Zentrum auf der Linie yy der Fig. 4 liegt und dessen Radius einer halben Summe der zu den punkierten Kreisen der Fig. 3 gehörenden Radien gleich ist.

Endlich schlägt sich die dritte Strömung (auch Ringströmung) in die ebene Strömung platt, welche in der dritten oben liegenden Schicht herrscht.

Mit kurzen Worten, alles oben auseinandergesetzte zusammenfassend können wir sagen: 1) bei der Bewegung erster Art biegen sich alle elementaren Ringströmungen ebenso, wie ein Rohr gebogen wird, wenn man ihre Achse in die krumme Lage zwingt; 2) bei der Bewegung zweiter Art werden

alle diese Ringströmungen in ebene Strömungen zerschlagen. Es ist auch zu bemerken, dass der Wirbelfaden in der Strömung von erster Art sich in eine krumme Linie biegt, zum Beispiel in die Kurve *mm* der Fig. 1. Bei der zweiten Art von Strömung biegt sich der Wirbelfaden nicht, doch geht er gerade bis auf dem Boden, wo er sich ansaugt (siehe zum Beispiel die Linie *yy* der Fig. 4).

III. Wenn die Bewegung von zweiter Art existieren kann, so hat sie praktisch viele Vorzüge im Vergleich zu der ersten. Wir wollen diese Vorzüge hier kurz aufzählen:

Erstens, wenn der Wirbelfaden sich längs der Krümmerachse biegt, so laufen wir Gefahr, dass er sich an die Fläche des Flusses ansaugt. Die Achse des Wirbels ist immer die Stelle des hohen Vakuums und in achsialer Richtung wird diesem Vakuum von keiner Kraft das Gleichgewicht gehalten. Also, wenn in einem Punkte des Fadens, der an der Oberfläche des Flusses liegt, der Druck einer Atmosphere gleich ist, so muss er längs des ganzen Fadens denselben Wert haben.

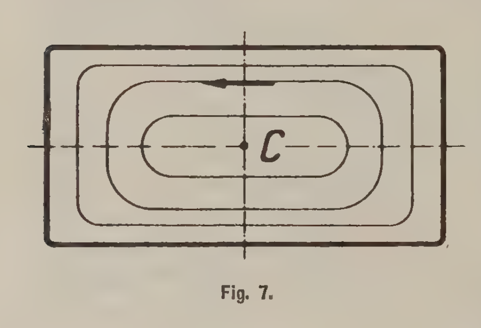


Fig. 7.

Und da das nicht der Fall ist, so fängt der Faden an als ein saugender Schlauch zu wirken, welcher Luft in den Krümmerraum aufsaugt. Dadurch wird die ganze Bewegung gestört.

Allgemein gesagt, die Bewegung im Krümmer ist nicht stationär und das Ende des Wirbels kann nicht unbeweglich sein. Am besten kann man diesen Wirbel mit einer Fahne vergleichen, die im Winde flattert. Die Gefahr des Ansaugens an die Oberfläche ist dabei gross, sogar unabwendlich.

Zweitens in der Bewegung mit dem gebogenen Wirbelfaden sind die Geschwindigkeiten im Schlauche nicht rein achsial. Sie haben auch Umlaufkomponenten, dessen Richtung in der Ebene des Querschnitts (siehe zum Beispiel den Querschnitt *mm* der Fig. 4) liegt. Die Fig. 7 zeigt uns das Schema der Bewegung, die wir dabei im Querschnitt des Schlauches bekommen. Der Punkt C dieser Figur zeigt uns die Spur des Wirbelfadens.

Wir sehen also dass die Geschwindigkeitskomponenten, welche die Flüssigkeit zwingen sich um den Punkt C zu bewegen, in diesem Falle unvermeidlich sind. Natürlich ist es immer ein Fehler der Bewegungsart, denn diese Geschwindigkeitskomponenten vergrössern überflüssige Energiever-

luste beim Austritt. In der zweiten Strömungsart existieren solche Geschwindigkeiten nicht.

Endlich, die Bewegung innerhalb des Wirbelfadens hat keinen Geschwindigkeitspotential. Folglich hat diese Bewegung nach den Formeln von Navier-Stokes Zähigkeitsverluste. Diese Verluste werden kleiner, wenn der Wirbelfaden kürzer wird. Und das ist der Fall, wenn der Faden sich am Krümmerboden ansaugt, denn dabei verschwindet das Stück des Fadens, welches sich im Schlauche befindet.

All das zusammen genommen, können wir es als bewiesen betrachten, dass der Ingenieur, der in seinen Konstruktionen die zweite Bewegungsart zu verwirklichen strebt, Recht hat, und dass die Turbinentheorie ihm in dieser Beziehung helfen soll, indem sie seine Gedanken begründet.

IV. Von reingeometrischen Gesichtspunkt aus ist die zweite Bewegungsart durchaus möglich. Anders steht die Frage, wenn wir sie mechanisch betrachten. Es ist nicht vornherein klar, dass die Bewegung allen Bedingungen der Mechanik genügt und man kann bezweifeln, ob sie überhaupt möglich sei.

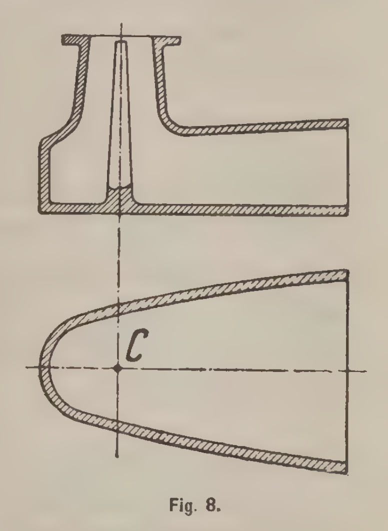


Fig. 8.

Es ist leicht zu verstehen, dass das zweite Schema der Bewegung sich nur in zwei Fällen verwirklichen lassen kann: erstens wenn im Punkt C eine Stange befestigt ist, welche die Kraft, womit die Strömung auf den Punkt C wirkt, auf sich nimmt; zweitens, wenn diese Kraft Null gleicht.

Die erste Lösung der Aufgabe gebraucht die Technik sehr oft (siehe die Fig. 8). Wir stellen in dieser Untersuchung die Frage, ob auch die zweite Lösung möglich sei und wenn ja, wie das geschehen kann.

V. Es sei O ein innerer Punkt der Ebene des Diffusors, von dem wir wissen wollen ob eine Strömung, die in O das Ergiebigkeitszentrum[1] hat, in ihm (im Diffusor) möglich sei. Im Folgenden setzen wir voraus, dass erstens die Koordinatenursprung der z-Ebene in O liegt und zweitens, dass der

[1] Mit diesem Wort wollen wir sagen, dass die Bewegung im Punkte O eine Wirbelquelle hat.

Punkt $z = O$ der z-Ebene dem Punkt $\zeta = O$ in der ζ-Ebene entspricht. Diese Voraussetzung gibt uns der Formel (1) gemäss die Gleichung

$$f(z_0) = f(O) = O, \tag{3}$$

wo z_0 die Grösse z im Punkt O bedeutet und also null gleicht.

Es ist leicht zu verstehen, dass wir diese Gleichung mit Hilfe einiger elementaren Operationen erfüllen können.

Ausserdem nehmen wir an, dass der Punkt $\zeta = \zeta_1$ der Gleichung (2) nahe an dem Punkt $\zeta = O$ liege und also, dass $|\zeta_1|$ sehr klein ist. Wir beschränken uns demgemäss im Folgenden mit Betrachtung der Strömungen für die das Zentrum der Ergiebigkeit $z = z_1$ sehr nahe an $z = z_0$ liegt.

Im allgemeinen Falle sind die Geschwindigkeiten der Strömung neben dem Punkte $C(z = z_1)$ aus der Gleichung

$$u - iv = \frac{Q - iJ}{2\pi(z - z_1)} + \bar{c} + c_1(z - z_1) + c_2(z - z_1)^2 + \ldots \tag{4}$$

zu bekommen.

Das Glied $\frac{Q - iJ}{2\pi(z - z_1)}$ ist hier das grösste und entspricht einer Wirbelquelle, die sich in C befindet. Das folgende der Grösse nach Glied $\bar{c}$ ist eine Funktion der Zahl z_1 und entspricht einer Geschwindigkeit c, die wir Nebengeschwindigkeit nennen. Nach all dem, was gesagt ist, muss die Nebengeschwindigkeit

$$\bar{c} = u_1 + iv_1$$

uns bekannt sein, wenn wir die Funktion $f(z)$ der Gleichung (1) kennen.

In der Tat entwickeln wir diese Funktion in der Nähe der Punktes $z = z_0$ nach Teylorreihe. Das gibt uns

$$\zeta = f(z) = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots, \tag{5}$$

wo

$$\zeta_0 = f(z_0) = 0. \tag{6}$$

Wenn wir jetzt die Gleichung (2) benutzen und in ihr anstatt ζ_1 und ζ_1^* die entsprechenden Werte aus (5) setzen, so erhalten wir nach den Potenzen

$$(z - z_0),\ (z - z_0)^2,\ (z - z_0)^3, \ldots$$

u. s. w. entwickelnd den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \bar{c} \doteq \frac{(Q - iJ)\,a_2}{2\pi a_1} + \frac{Q a_1}{\pi} + \frac{(Q - iJ)(3a_1 a_3 - a_2^2)}{2\pi a_1^2}(z_1 - z_0) - \\ - \frac{Q + iJ}{2\pi} a_1 \bar{a}_1 (\bar{z}_1 - \bar{z}_0) + \frac{Q}{\pi}(2a_2 + a_1^2)(z_1 - z_0) + (\ldots). \end{aligned} \tag{7}$$

Es ergibt sich, ferner, dass die Kraft, mit welcher die Strömung auf den Punkt C wirkt, von der Nebengeschwindigkeit abhängt und durch die Formel:

$$P = -\rho c(Q + iJ) \tag{8}$$

bestimmt werden kann.

Folglich, damit eine stationäre Bewegung mit dem Strömungszentrum im Punkte $z = z_0$ existieren könnte, ist es notwendig und hinreichend, dass die Nebengeschwindigkeit der Strömung c für $z_1 = z_0 = O$ gleich Null sei. Nach der (7) bedeutet dies dass:

$$1 - i\frac{J}{Q} = -\frac{2a_1^2}{a_2}, \tag{9}$$

wo a_1 und a_2 aus der Gleichung (5) zu nehmen sind.

Diese Forderung ergibt zwei Gleichungen für die Bestimmung der Koordination des Punktes $z = z_0$, welcher unsere Bedingungen erfüllt und welchen wir in diesem Falle einen reaktionslosen Ergibigkeitspunkt nennen. Es ist zu bemerken, dass die Lage eines reaktionslosen Punkts nach (9) von dem Verhältnisse $\frac{J}{Q}$ abhängt. Physikalisch gesprochen, hängt diese Lage von der Grösse der Zirkulation ab, welche das Kraftwerk in der Strömung hervorruft.

Mathematisch spricht die Gleichung (9) den folgenden Satz aus:

damit ein Punkt $z = z_0$ ein reaktionsloses Ergibigkeitszentrum werden kann, muss der Realteil der komplexen Grösse: $-\frac{2a_1^2}{a_2}$ Eins gleichen und dabei gibt uns der Imaginärteil mit Minus, genommen die Grösse des Verhältnisses J/Q.

Im Folgenden nehmen wir an, dass der Punkt $z = z_0$ ein reaktionloser Punkt ist und dass folglich die Gleichung (9) erfüllt ist. Ausserdem setzen wir

$$z_1 - z_0 = x + iy.$$

Wenn wir dann, wie oben schon gesagt, mit kleinen $|z_1 - z_0|$ uns begnügen und die zweiten Potenzen von $|z_1 - z_0|$, das heisst die Ausdrücke x^2, xy, y^2, x^3 u. s. w. vernachlässigen, so bekommen wir ohne prinzipiellen Schwierigkeiten in diesem Falle aus der Gleichung (7):

$$\begin{aligned} u_1 &= Ax + By; \\ v_1 &= Cx + Dy, \end{aligned} \tag{10}$$

wo erstens:

$$A = \frac{Q}{\pi r_2}(M + L); \quad B = \frac{Q}{\pi r_2}(K - N); \tag{11'}$$

$$C = \frac{Q}{\pi r_2}(N + K); \quad D = \frac{Q}{\pi r_2}(L - M);$$

zweitens:

$$\left.\begin{aligned} M &= 4r_2^2 \cos\alpha_2 - 3r_1 r_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2) + r_1^2 r_2 \cos 2\alpha_1; \\ N &= 4r_2^2 \sin\alpha_2 - 3r_1 r_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2) + r_1^2 r_2 \sin 2\alpha_1; \\ L &= r_1^4 \cos(\alpha_2 - 2\alpha_1); \\ K &= r_1^4 \sin(\alpha_2 - 2\alpha_1), \end{aligned}\right\} \tag{11''}$$

und endlich $r_1, r_2, r_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ aus den Gleichungen

$$a_1 = r_1 e^{i\alpha_1}; \quad a_2 = r_2 e^{i\alpha_2}; \quad a_3 = r_3 e^{i\alpha_3} \tag{11'''}$$

bestimmt werden.

VI. Obschon die Bewegung der Flüssigkeit, falls sich das Ergibigkeitszentrum in dem Reaktionslosen Punkte befindet, stationär ist, kann sie doch wohl unstabil sein. Um die Frage über die Stabilitätsbedingungen der Bewegung zu beantworten, müssen wir die Formeln (10) benutzen. Mit (8) zusammen geben diese Formeln die Grösse und die Richtung der Kraft P, mit welcher die sich bewegende Flüssigkeit am Punkte C wirkt, falls die Bewegung stationär ist. Da aber im Punkt C nichts diese Kraft balanciert, so beginnt der Punkt sich zu bewegen und die Strömung wird unstationär.

Um die Geschwindigkeit $w = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$ des Punktes C zu finden, schreiben wir nur, dass in Wirklichkeit keine unbalancierte Kraft im Punkte $C(z = z_1)$ entstehen kann. Das gibt uns die Gleichung

$$w = c \tag{12}$$ [1]

das heisst: die G e s c h w i n d i g k e i t d e r B e w e g u n g d e s P u n k t e s C m u s s d e r N e b e n g e s c h w i n d i g k e i t d e r S t r ö m u n g m i t d e m Z e n t r u m i n d i e s e m P u n k t e g l e i c h s e i n.

[1] Die Betrachtungen, die uns zu dieser Gleichung führen, sind sehr delikat. Der Punkt C ist kein gewöhnlicher Punkt und hat dazu eine mechanische Eigentümlichkeit jede Sekunde eine bestimmte Menge von der Flüssigkeit in die Ebene der Strömung zu bringen. Wenn wir voraussetzen, dass keine Bewegungsgrösse mit dieser Flüssigkeitsmenge in die Ebene kommt und nachdem die Gleichungen, welche uns der Impulssatz ergiebt, schreiben, so bekommen wir die Gleichung (12) des Textes.

Die Formeln (12) und (10) führen uns zu folgenden Differentialgleichungen der Bewegung des Zentrums C:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + By \qquad (13)$$
$$\frac{dy}{dt} = Cx + Dy$$

dessen Untersuchung uns erlaubt ohne jede Schwierigkeit die Stabilitätsbedingungen der Bewegung zu erhalten.

Indem wir die Bezeichnungen

$$E = \frac{A + D}{2} \qquad (14)$$
$$F = \frac{(A - D)^2 + 4BC}{4}$$

annehmen, finden wir die folgende Regel: im Falle $F > O$ ist die Bewegung stabil, wenn

$$E < -\sqrt{F}, \qquad (15')$$

und im Falle $F < O$ ist es für die Bewegungsstabilität notwendig und hinreichend, dass

$$E < O. \qquad (15'')$$

Hier kann man folgendes hinzusetzen: wenn man im ersten Falle (also wenn $F > O$ und $E < -\sqrt{F}$ ist) den Punkt C aus seiner Ruhelage $z = z_0$ bringt, so kehrt dieser Punkt im $z = z_0$ zurück und dabei ist die Trajektorie seiner Bewegung eine einfache Kurve ohne irgend eine Eigentümlichkeit im $z = z_0$. Im zweiten Falle dagegen (wenn $F < O$ und $E < O$ ist) kehrt der Punkt C auf einer spiralartigen Kurve sich bewegend im $z = z_0$ zurück. Also, bevor er an seinen Ruheplatz gelangt, wird er um den Punkt $z = z_0$ unendlich viel mal herumkreisen.

VII. Man kann jetzt fragen, ob es solche Diffusorformen gibt, dass 1) im Gebiete des Diffusors reaktionlose Punkte existieren; 2) die Bewegung, die entsteht, wenn das Ergiebigkeitszentrum in einem solchen Punkte sich befindet, stabil ist?

Diese Frage müssen wir bejahend beantworten und ein Beispiel für einen solchen Diffusor gibt der spiralartiger Diffusor, der von einem unendlich langen Abschnitte der logarithmischen Spirallinie, welche in der Strömung als Wand wirkt, gebildet ist (siehe Fig. 9).

Betrachten wir im solchen Diffusor die Bewegung, deren Ergiebigkeitszentrum im geometrischen Zentrum der Spirallinie liegt und welche die Bedingung

$$\frac{J}{Q} = tg\alpha \tag{16}$$

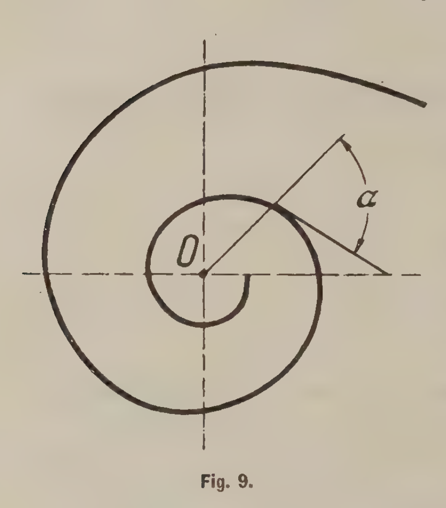


Fig. 9.

erfüllt, wo α der Winkel zwischen einer Tangente zur Spirallinie und dem entsprechenden Radius ist. Die Anwendung der oben geschriebenen Formel ergiebt, dass eine solche Bewegung erstens stationär und zweitens stabil ist.

Von dieser Grundform des Diffusors ausgehend können wir andere derivierten, dieselbe Eigenschaft habende Formen erhalten. Eine dieser Formen ist auf der Fig. 10 gezeigt.

Bemerken wir jetzt zum Schluss, dass die Bewegungen, welche den soeben beschriebenen ähnlich sind, auch in einer Turbinenschacht entstehen können. Es ist jedoch im letzten Falle keine Bewegung mit einem laufenden Quellenzentrum, sondern eine mit Senkenzentrum. Ein Wirbeltrichter, der auf der Fläche der offenen Schacht kreist, kann als Beispiel einer solchen Bewegung dienen.

Sehr interessant ist die Hindeutung der Theorie daruf, dass die Bewegung des Trichters in der Turbinenschacht nicht so leicht stabil wird, wie die Bewegung des Diffusors.

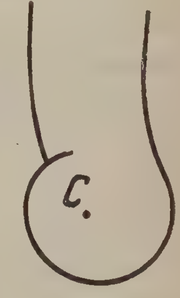


Fig. 10.

VIII. Nehmen wir jetzt an, dass die Bewegung im Kaplanschen Diffusor mit Plattschlagung der elementaren Ringsströmungen vor sich geht und dass sie sich im horizontalen Schlauche in eine ebene Strömung verwandelt. Es fragt sich ob in diesem Falle eine gute Verwandlung der kinetischen Energie im Diffusor möglich ist?

In Bezug auf diese Frage hat die Arbeit eines Mitarbeiters des Zentralen Aerodynamischen Institutes in Moskau N. A. Sokolow zu interessanten Ergebnissen geführt.

H. Sokolow hat einige Beispiele des ebenen Diffusors mathematisch betrachtet und dabei den Begriff der Dissipation der kinetischen Energie

im Diffusor eingeführt. Und zwar wird bei den technischen Berechnungen der Verlust im Diffusor gleich

$$H = \frac{v_m^2}{2g} \tag{17}$$

angenommen, wo v_m die mittlere Austrittsgeschwindigkeit ist. Aber der wirkliche Verlust wird von der Gleichung

$$H' = \frac{1}{\Sigma v_n\, db} \Sigma v_n\, db \frac{v_n^2 + v_t^2}{2g} \tag{18}$$

gegeben, wo db das Element der Breite des Austrittquerschnittes ist und v_n und v_t die normale und tangentiale Komponenten der Austrittsgeschwindigkeit sind.

Daraus erhalten wir den Koeffizient der zusätzlichen Dissipation der kinetischen Energie:

$$\sigma = \frac{H'}{H}, \tag{19}$$

welcher immer grösser als Eins ist.

Es ist zu bemerken, dass dieser Koeffizient nur die Verluste in der idealen Strömung berechnet; also müssen wir ihn von den Koeffizienten unterscheiden, die sich auf die Zähigkeit der Flüssigkeit beziehen.

Mit Hilfe der Methode, welche im § 1 beschrieben ist, lässt sich dieser Koeffizient für jeden Diffusor, dessen konforme Abbildung auf den Kreis bekannt ist, berechnen. Die Fig. 11 gibt uns die Form des Diffusors, den N. A. Sokolow betrachtet hat.

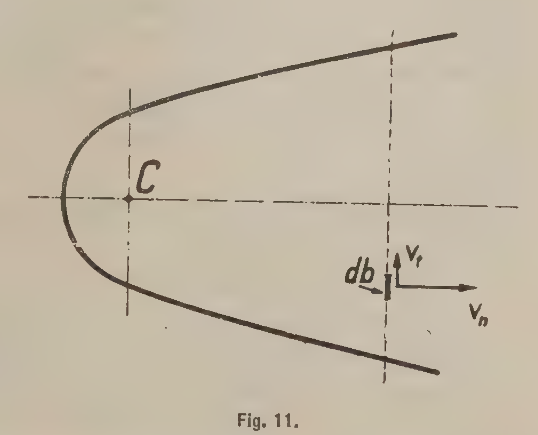


Fig. 11.

Als diese Berechnungen gemacht wurden, erwarteten wir, dass der Koeffizient σ gross sei wenn J beträchtlich ist. Das heisst, wenn die Strömung, welche die Maschine (Turbine oder Pumpe) in den Diffusor abgibt, grosse kreisende Bewegung (Zirkulation) hat.

In Wirklichkeit aber erwiesen sich die Dissipationverluste als klein und, sogar im sehr ungünstigen Falle, wenn $\frac{J}{Q} = 5$ ist, übersteigen sie nicht 10% (Dissipationskoeffizient $\sigma = 1.1022$).

Die bei Technikern sehr verbreitete Meinung, dass eine Saugröhre nur achsialen Geschwindigkeiten gut verwerte und im Falle der Strömung mit Zirkulation grosse Verluste habe, ist damit für falsch zu halten.

IX. Zu bemerken ist, dass all'diese Schlüsse nur dann richtig sind, wenn die Strömung sich nicht von den Diffusorwänden losreisst. Aber, die Versuche eines anderen Mitarbeiter des Zentralen Aerodynamischen Instituts W. J. Polikowsky haben bewiesen, dass eine Losreissung solch einer Strömung von den Wänden möglich ist und damit ist eine neue Aufgabe an uns gestellt diese Erscheinung in Erwägung zu ziehen. Glücklicherweise kann uns die Theorie auch hier etwas helfen. Uns zwar können wir, indem wir die Kirchofsche Methode verallgemeinen und sie mit dem im § 1 gesagten vereinigen, die Strömung finden, welche im Diffusor mit Strahlbildung vor sich gehen.

Auf Fig. 12 ist der von uns betrachtete Diffusor gezeigt. Indem wir Levi-Civita's Methode anwenden und das Gebiet der Strömung auf einen Halbkreis der ζ-Ebene konform abbilden, erhalten wir in dieser letzten Ebene eine Strömung, welche folgende Eigenschaften hat:

1) sie hat im Punkt $\zeta = \zeta_1$, welcher den Punkt C der z-Ebene abbildet, eine Quelle und einen Wirbel, deren Ergiebigkeit und Zirkulation Q und J sind;

2) sie hat im Punkte $\zeta = O$, welcher $z = \infty$ abbildet, eine Senke von Ergiebigkeit $2Q$;

3) die ganze Peripherie des Halbkreises ist eine ihrer Strömungslinien.

Der Symmetrie wegen muss die Bewegung im Punkt $\zeta = \overline{\zeta}_1$ eine Wirbel-Quelle mit der Ergiebigkeit Q und der Zirkulation: $-J$ haben. Ausserdem muss die andere Hälfte der Kreislinie auch eine Strömungslinie sein.

All das gibt uns die folgende Formel:

$$f = \varphi + i\psi = \frac{Q - iJ}{2\pi} \log(\zeta - \zeta_1) + \frac{Q + iJ}{2\pi} \log(\zeta - \zeta_1^*) + \\ + \frac{Q + iJ}{2\pi} \log(\zeta - \overline{\zeta}_1) + \frac{Q - iJ}{2\pi} \log(\zeta - \zeta_1^*) \quad \frac{2Q}{2\pi} \log \zeta + \text{const.} \tag{20}$$

Die Fig. 13 gibt uns den Halbkreis in der ζ-Ebene auf dem das Diffusorgebiet abgebildet ist. Dabei, wie es zum Teil schon gesagt ist, bildet der

Punkt $\zeta = \zeta_1$ der ζ-Ebene sich an den Punkt C der z-Ebene ab und die Punkte der ζ-Ebene, welche den Punkten P_1, B, O, A, und P_2 der z-Ebene entsprechen, sind mit denselben Buchstaben verzeichnet.

Um jetzt Levi-Civita's Funktion ω zu finden, brauchen wir uns nur der Gleichung

$$u - iv = \frac{df}{dz} = e^{-i\omega} \tag{21}$$

zu erinnern und dazu zu bemerken, dass diese Funktion im Punkt $\zeta = \zeta_1$ eine Singularität haben muss, welche durch die Gleichung:

$$\omega = \theta + i\tau = -i \log(\zeta - \zeta_1) + \omega_1 \tag{22}$$

erklärt wird. Dabei ist ω_1 im $\zeta = \zeta_1$ holomorph.

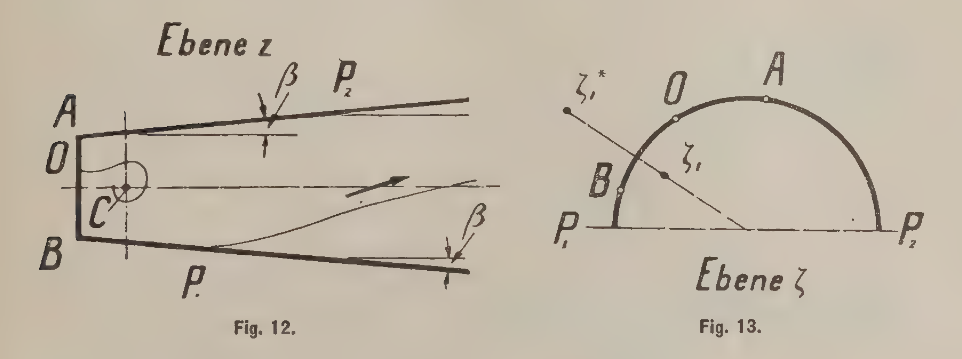


Fig. 12. Fig. 13.

Folglich wird die Funktion ω mit Hilfe ihrer folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt:

1) $\theta = \beta$ auf dem Bogen $P_2 A$ des Halbkreises $P_1 A P_2$ (siehe Fig. 12 u. 13);

2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ auf dem Bogen AO;

3) $\theta = -\frac{\pi}{2}$ auf dem Bogen OB;

4) $\theta = -\beta$ auf BP_1;

5) $\tau = O$ auf dem Durchmesser $P_1 P_2$ woraus folgt, dass die Funktion $\omega = \theta + i\tau$ symmetrisch im Bezug auf die Gerade $P_1 P_2$ ist, und:

6) im Punkt $\zeta = \zeta_1$ hat die Funktion den Hauptteil:

$$-i \log(\zeta - \zeta_1).$$

Schliesslich erhalten wir für diese Funktion den Ausdruck:

$$\omega = i \log \frac{\zeta^2 - 2be^{-i\alpha}\zeta + e^{-2i\alpha}}{\zeta^2 - 2be^{+i\alpha}\zeta + e^{+2i\alpha}} + 2\nu + \beta + \\ + i\frac{\pi - 2\beta}{\pi} \log \frac{(\zeta - e^{i\alpha'})(1 - \zeta e^{i\alpha'''})}{(1 - \zeta e^{i\alpha'})(\zeta - e^{i\alpha'''})} - i \log \frac{\zeta - e^{i\alpha''}}{1 - e^{i\alpha''}\zeta}. \tag{23}$$

Dabei haben wir angenommen:

1) der Radius des Halbkreises in der ζ — Ebene ist gleich Eins;

2) die komplexen Koordinate der Punkte A, O, B dieses Halbkreises seien:

$$\zeta_A = e^{i\alpha'}; \; \zeta_0 = e^{i\alpha''}; \; \zeta_B = e^{i\alpha'''}; \tag{24}$$

3) es sei:

$$\zeta_1 = ae^{i\alpha}; \; a' = \frac{1}{a}; \quad \zeta_1^* = \frac{1}{\bar{\zeta}_1} = a' e^{i\alpha}, \tag{25}$$

und ausserdem:

$$2b = a + a'; \tag{26}$$

4) es sei auch:

$$\left(\frac{\zeta^2 - 2be^{-i\alpha}\zeta + e^{-2i\alpha}}{\zeta^2 - 2be^{i\alpha}\zeta + e^{2i\alpha}}\right)_{\zeta=1} = \frac{e^{i\nu}}{e^{-i\nu}} = e^{2i\nu}. \tag{27}$$

Nachdem wir jetzt mit Hilfe der Gleichungen (21) und (23) die Grössen $e^{i\omega}$ und df berechnet haben, bekommen wir, wie gewöhnlich:

$$dz = e^{i\omega} df = -\frac{Qe^{-\alpha i''}(\zeta^2 - 1)(\zeta - e^{\alpha i''})^2}{\pi(\zeta^2 - 2be^{-i\alpha}\zeta + e^{-2i\alpha})^2} \left\{\frac{(1 - \zeta e^{\alpha i'})(\zeta - e^{\alpha i'''})}{(\zeta - e^{i\alpha'})(1 - \zeta e^{i\alpha'''})}\right\}^{\frac{\pi - 2\beta}{2\pi}} d\zeta. \tag{28}$$

Dieser Ausdruck und die ganze Theorie lässt sich ein wenig vereinfachen, wenn wir Levi-Civita's Halbkreis durch ein Quadrant[1] ersetzen.

Noch einfacher wird die Aufgabe, wenn wir $\beta = 0$ setzen (siehe Fig. 14). Dabei lässt sie sich mit Hilfe der elliptischen Funktionen zu Ende bringen.

Indem wir jetzt die Aufgabe für $\beta = 0$ gelöst und also den auf Fig. 14 gezeigten Diffusor betrachtet haben, sind wir imstande den Fall, wo β klein ist, annähernd zu untersuchen.

Genau so kann man dazu einen angenähernden Kunstgriff beifügen, welcher die Abrundung der Winkeln A und B in Erwägung zu ziehen ermöglicht.

[1] Das heisst durch ein Gebiet, das innerhalb eines Winkels von 90° liegt.

Heute dürfen wir noch nicht mit Sicherheit von den praktischen Folgerungen dieser Theorie reden. Doch versprechen diese Folgerungen sehr interessant zu werden.

Auf Grund von vorangehenden Erwägungen ergibt es sich, dass die Strömung im Diffusor von der aus dem Rade austretenden Strömung (ihrer Zirkulation) vollständig abhängt. Anderseits wirkt der Diffusor selbst

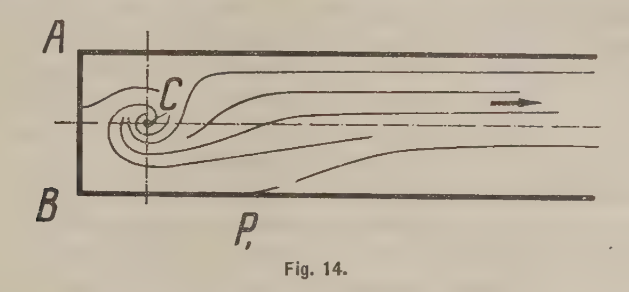


Fig. 14.

wesentlich auf den Druckunterschied, welcher durch das Rad ausgenützt werden kann. Dadurch aber wird der Drehmoment des Rades und also die Zirkulation der Austrittströmung im hohen Grade bestimmt.

Im ganzen arbeiten diese zwei Maschinenteile Rad und Diffusor im stetigen Zusammenwirken und genau dieses Zusammenwirken bestimmt die Arbeitsweise der ganzen Anlage.

Heutzutage kann der Techniker diese Erscheinungen nicht kontrollieren, denn er versteht nicht dessen Zusammenhang. Aber wenn er sie verstehen lernt, wird er ohne Zweifel auch Herr darüber werden.

П. А. ВАЛЬТЕР. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ К ТЕОРИИ ПЛОСКОГО ДИФФУЗОРА ТИПА КАПЛАНА

РЕЗЮМЕ

В статье излагается решение ряда задач, относящихся к теории плоского диффузора, который применяется в современной промышленности, во-первых, в качестве кожуха центробежного насоса или вентилятора, во-вторых, как часть всасывающей трубы Каплана.

Прежде всего дается решение об отыскании потока внутри такого диффузора, соответствующего определенным величинам Q и J. При этом первая величина обозначает секундный расход жидкости, отдаваемой в диффузор

гидравлическим аппаратом, а вторая циркуляцию (закрученность) потока, посылаемого в диффузор. Оказывается, что поток в диффузоре мы всегда в состоянии отыскать, если только нам известно конформное отображение ограниченной стенками диффузора области на внутренность некоторого круга.

Практическое приложение этого решения мы получаем при исследовании вопроса об устойчивости вихревого движения, отдаваемого турбиной во всасывающую трубу Каплана.

Если режим работы турбины ненормальный, то поток, отдаваемый ею во всасывающую трубу, имеет циркуляцию. В первом приближении его можно себе представить как поток идеальной жидкости с вихревой трубкой, вокруг которой циркуляция имеет некоторое определенное конечное значение J. Трубка эта, вообще говоря, должна кончаться или где-нибудь на стенке диффузора, или на дне пруда, или, наконец, на его поверхности.

В последнем случае вакуум во всасывающей трубе будет неминуемо сорван. Ось вихревой трубки, согласно общим теоремам гидродинамики, является линией сильного разрежения, причем давление вдоль оси никакими силами не уравновешивается. Поэтому, если на одном конце оси давление равно атмосферному, то оно должно быть равным атмосфере и повсюду. А так как этого нет, то, присоединившись через поверхность пруда к атмосфере, вихревая трубка начинает действовать как пожарная кишка, засасывающая воздух во всасывающую трубу. Воздух этот, поступая в район, где господствует разрежение, начинает расширяться, образует пену и т. п. В результате он коренным образом изменяет поток, сильно ухудшая коэффициент полезного действия турбины.

В предлагаемой вниманию читателя работе автор ставит вопрос: какие условия должны выполняться для того, чтобы указанного нежелательного присоединения конца вихревой трубки к поверхности пруда не произошло.

Разбивая диффузор Каплана (см. фиг. 1) на две части: первую — вертикальный патрубок, и вторую — горизонтальный диффузор, автор рассматривает движение жидкости в последнем как плоский поток, создаваемый источником с расходом Q и вихрем с циркуляций J, расположенными в точке присоединения вихревой трубки ко дну диффузора.

Точку эту автор называет центром раздачи.

При этом автор допускает, что режим потока будет стационарным только в том случае, если реактивная сила, с которою поток действует на центр раздачи, равна нулю.

Это условие нетрудно выразить в виде некоторых уравнений, определяющих положение центра раздачи. Уравнения эти могут быть написаны в явном виде всякий раз, когда мы умеем область, ограниченную стенками диффузора, конформно отобразить на внутренность круга. Затем остается только исследовать вопрос, допускают ли написанные уравнения решения, соответствующие точкам, лежащим внутри диффузора, и, если да, то определить положение этих точек. Найденные таким образом точки автор называет безреактивными центрами раздачи.

В частности, исследование нам показывает, что положение безреактивного центра раздачи зависит от отношения J/Q, т. е. от степени закрученности потока, отдаваемого во всасывающую трубу.

Более сложным оказывается вопрос об устойчивости получающегося таким образом вихревого режима во всасывающей трубе. Чтобы осветить этот вопрос, автору приходится рассматривать нестационарное движение, которое получается в диффузоре в том случае, когда центр раздачи C (конец вихревой трубки) находится в положении, не совпадающем с положением равновесия. Автор дает общий метод исследования вопроса, основанный на предположении, что конформное изображение области потока (внутренней области диффузора) на круг нам известно.

Применяя свои общие результаты к частному случаю, автору удается указать форму диффузора, в котором, во-первых, существует такое положение точки C, при котором сила реакции равна нулю. Во-вторых, движение в диффузоре при таком положении C будет устойчиво.

Следует заметить, что диффузор, найденный автором, принадлежит к числу спиральных диффузоров, образованных отрезком логарифмической спирали.

Допустим теперь, что вихревой жгут присосался ко дну всасывающей трубы, и движение в диффузоре происходит с расплющиванием кольцевых потоков, давая плоские потоки в нижнем раструбе.

Спрашивается, возможно ли при таком положении вещей выгодное использование кинетической энергии потока?

Интересные результаты в этом отношении дает работа сотрудника ЦАГИ инж. Н. А. Соколова, проделанная им по предложению автора статьи. Им было рассмотрены отдельные частные случаи плоского диффузора и введено понятие о рассеивании энергии в диффузоре. А именно, расчетная потеря в диффузоре будет

$$H = \frac{v^2_{cp.}}{2g},$$

где $v_{cp.}$ — средняя скорость выхода. Действительная же потеря больше и дается равенством

$$H' = \frac{1}{b} \Sigma db \frac{v_n^2 + v_t^2}{2g}.$$

Отсюда получаем коэффициент рассеивания энергии

$$\sigma = \frac{H'}{H},$$

который всегда больше единицы.

Интересно, что коэффициент этот относится к потерям в идеальной жидкости.

Когда эти вычисления производились, мы ожидали, что коэффициент этот будет велик в случаях, когда J значительно, т. е. когда поток, отдаваемый

механизмом в плоский диффузор, имеет сильное вращательное движение (циркуляцию).

В действительности, однако, потери на рассеивание оказались малы и в очень неблагоприятном случае, когда $J/Q = 5$, не превзошли 10% (коэффициент рассеивания $\sigma = 1.1022$).

Этим доказывается неправильность распространенной среди техников точки зрения о том, что всасывающая труба турбины в состоянии использовать только энергию осевых скоростей, в случае же потока с циркуляцией она дает большие потери.

Следует, однако, помнить, что все эти выводы сделаны в предположении, что поток в диффузоре течет, не отрываясь ни от одной из его сторон.

Опыты другого сотрудника ЦАГИ инж. В. И. Поликовского показали, однако, что отрыв потока от стенок вполне возможен, и перед нами, таким образом, встает новая задача — научиться учитывать также и этот фактор.

Счастливым образом и здесь теоретическая гидродинамика может оказать нам некоторую помощь. Обобщая метод Кирхгофа и комбинируя его с приемами, применяющимися в теории камер, удается найти потоки, происходящие в диффузоре с отрывом струй.

Пока еще нельзя с полной уверенностью говорить о практических выводах из намеченной теории. Однако, насколько позволяют судить предварительные соображения, выводы эти обещают быть очень интересными. Оказывается, что работа диффузора теснейшим образом зависит от подаваемого в него рабочим колесом полного гидродинамического напора. С другой стороны, диффузор сам сильно влияет на режим турбины и через нее на этот напор.

В результате эти две детали — рабочее колесо и диффузор — оказываются в непрерывном взаимодействии, определяя своим взаимодействием характер работы турбины в каждый данный момент.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles — Отделение математических и естественных наук

ЭНЕРГЕТИКА ОКИСЛОВ АЗОТА И СТРОЕНИЕ ЕГО ЗАКИСИ

Л. В. ПИСАРЖЕВСКОГО

Величиной теплоты образования из молекул нельзя измерять прочность. Так, например, теплота образования N_2O — 17.7 и Cl_2O — 16.2 кал. указывают на почти одинаковую непрочность молекул N_2O и Cl_2O.

Но вычисление работы разрыва на атомы:

$$\begin{array}{lr} 2N_2O \rightarrow 2N_2 + O_2 & + 17.7 \times 2 \\ 2N_2 \rightarrow 4N & - 220 \times 2 \\ O_2 \rightarrow 2O & - 58.5 \times 2 \\ \hline N_2O \rightarrow 2N + O & - 261 \text{ калор.} \end{array} \qquad \begin{array}{lr} 2Cl_2O \rightarrow 2Cl_2 + O_2 & + 16.2 \times 2 \\ 2Cl_2 \rightarrow 4Cl & - 57 \times 2 \\ O_2 \rightarrow 2O & - 58.5 \times 2 \\ \hline Cl_2O \rightarrow 2Cl + O & - 99 \text{ калор.} \end{array}$$

показывает, что N_2O почти втрое прочнее. Но, так как, после разрыва на атомы происходит соединение атомов азота, хлора и кислорода в их молекулы, причем у азота выделение энергии в четыре раза больше, чем у хлора (220 и 57), то и получается почти одинаковое выделение энергии при образовании мол кул азота и кислорода из N_2O и Cl_2 и O_2 из Cl_2O.

В нижеприведенной таблице сопоставлены:

Теплоты образования газообразных молекул окислов азота из молекул азота и кислорода	Работы разрыва на атомы молекул окислов азота, считая на 1 грамматом [1]	Работа отрыва одного атома кислорода от молекул окислов азота
N_2O . . . . . —17.7 калор.	$\frac{N_2O}{2}$ . . . . . 130.5 калор.	41 б. калор. [1]
NO . . . . . —20.9 »	NO . . . . . . 147 »	147
NO_2 . . . . . — 4.1 »	NO_2 . . . . . 219 »	72
N_2O_5 . . . . — 1.2 »	$\frac{N_2O_5}{2}$ . . . . . 256 »	74

[1] При расчетах работ разрыва на атомы и работ отрыва одного атома кислорода работа разрыва на атомы молекулы азота принята равной 220 б. калор. (см. A. Eucken. Lehrbuch d. chemischen Physik, 1930, S. 879).

Вычисленные из теплот образования работы разрыва на атомы дают действительную сравнительную прочность окислов азота по отношению к разрыву их молекул на составляющие их атомы.

Работы же отрыва одного атома кислорода от молекул окислов азота вполне отвечают химическим отношениям этих окислов.

Что касается работ отрыва одного атома кислорода от молекул окислов азота, то они рассчитаны следующим образом.

Для N_2O, исходя из предположения, что в этой молекуле соединены друг с другом положительный молекул-ион азота $(N_2)^{\cdot\cdot}$ с отрицательным ионом кислорода $(N_2)^{\cdot\cdot}O''$ и что, следовательно, при образовании этой молекулы не происходит распада молекулы азота на атомы:

$$\begin{array}{r} O_2 \rightarrow 2O \quad -58.5\times 2 \\ 2N_2 + 2O \rightarrow 2N_2O + \quad Q\times 2 \\ \hline 2N_2 + O_2 \rightarrow 2N_2O - 17.7\times 2 \end{array}$$

Отсюда: $Q - 58.5 = -17.7$ и $Q = 41$, т. е. теплота образования молекулы N_2O из молекулы азота и атома кислорода: $N_2 + O \rightarrow N_2O + 41$ равна 41 б. калор.

Отсюда работа отрыва атома кислорода от молекулы закиси азота равна — 41 б. калор.

Для молекулы NO_2 расчет сделан путем вычета из работы разрыва NO_2 на атомы работы разрыва NO на атомы: $219 - 147 = 72$.

Для молекулы N_2O_5 — исходя из следующего рассуждения. Строение этой молекулы:

$$\begin{array}{c} O \qquad\qquad\qquad\quad O \\ \rangle\!\!\!= N - O - N =\!\!\!\langle \\ O \qquad\qquad\qquad\quad O \end{array}$$

Вычитая из работы разрыва этой молекулы на атомы: $256\times 2 = 512$ удвоенную работу разрыва на атомы группы NO_2: $219\times 2 = 438$, получаем: $512 - 438 = 74$ — работу отрыва среднего атома кислорода.

Данные работ отрыва атома кислорода отвечают химическим отношениям окислов азота. Так, N_2O_5 легко распадается, отделяя как раз средний атом кислорода:

$$N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + O$$

NO легко присоединяет к себе еще один атом кислорода даже при взаимодействии с молекулами последнего.

NO_2 сравнительно легко отдает один из своих атомов кислорода. И по энергетике этой молекулы отнятие одного атома кислорода требует 74 калор. работы, отнятие же следующего — вдвое большего количества работы: 147 калор.

Легче же всего отдает свой атом кислорода молекула N_2O: тлеющая лучина воспламеняется в закиси азота, как в чистом кислороде.

Если бы при образовании молекул N_2O происходил разрыв молекул азота на атомы, то в молекуле N_2O существовали бы два отдельных положительных иона азота: $N^{\breve{}}—'O'—N^{\breve{}}$, а не молекул-ион его: $(N_2)^{\breve{}\breve{}}O''$. Но тогда работа отрыва атома кислорода от молекулы N_2O была бы больше. Это была бы величина, обратная величине теплоты образования молекул N_2O из атомов азота и кислорода:

$$\begin{array}{rl} O_2 \rightarrow 2O & -58.5 \times 2 \\ 2N_2 \rightarrow 4N & -220 \times 2 \\ 4N + 2O \rightarrow 2N_2O + & Q \times 2 \\ \hline 2N_2 + O_2 \rightarrow 2N_2O & -17.7 \times 2 \end{array}$$

Отсюда $Q = 261$, т. е. $2N + O \rightarrow N_2O + 261$ б. калор.

И тогда отрыв атома кислорода требовал бы работы в 261 калор., т. е. большей, чем для какого-либо другого из окислов азота. А это не соответствует действительности. Отсюда вывод, что в состав молекулы закиси азота действительно входит положительный молекул-ион азота: $(N_2)^{\breve{}\breve{}}O''$. Это подтверждается изучением спектра молекулы азота.

Спектр молекулы азота подобен спектрам щелочно-земельных металлов. Следовательно, в молекуле азота должны находиться два внешних, относительно непрочно связанных, электрона. Остальные восемь (по четыре валентных электрона от каждого атома азота) очень прочно связывают между собой оба ядра молекулы. Два упомянутых внешних электрона ослабляют эту связь: при возбуждении молекулы азота, когда эти два внешних электрона дальше отстоят от ядер, последние сближаются.[1] Это значит, что прочность связи двух атомов в молекуле азота (работа разрыва очень велика, равна 220) действительно создается указанными восемью электронами.

Присутствие в молекуле азота двух внешних электронов, подобных валентным электронам атомов щелочно-земельных металлов делает вероят-

[1] A. Eucken. Lehrbuch der chemischen Physik, 1930, S. 918.

ным существование молекул таких соединений азота, куда он входит как положительный молеку-ион, т. е. как целая его молекула, потерявшая два своих внешних электрона.

Этот вывод согласуется вполне со сделанным выше заключением о составе молекулы закиси азота: $(N_2)^{\cdot\cdot}O''$.

Украинский институт физической химии
Днепропетровск
15 II 1933

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ДВЕ ВЕРХНЕПЕРМСКИЕ МОРСКИЕ ЛИЛИИ ИЗ ЗАКАВКАЗЬЯ

Н. Н. ЯКОВЛЕВА

(*Представлено академиком* **А. А. Борисяком**)

Описываемые лилии найдены мною на Араксе около Джульфы в красноватых мергелистых известняках, граничащих наверху с триасом. До сих пор морских лилий в Закавказской перми не находили, если не считать члеников и обломков стеблей, не дающих возможности определения рода.

Erisocrinus araxensis nov. sp. (табл. I, фиг. 3, 4 и 5)

Имеется одна хорошо сохраненная чашечка этой лилии, с которой могут быть связаны членики стебля, в изобилии встречающиеся в верхнепермской красноватой толще мергелистых известняков около Дарашама в долине Аракса близ Джульфы.

Чашечка конической формы с углом конусности около 57°. Конус усечен внизу плоским основанием, диаметр которого (3.5 мм) составляет около 1/3 наибольшего поперечника чашечки (10 мм) при высоте ее около 6 мм. Основание почти круглое, слабо пятиугольного очертания. Infrabasalia наполовину находятся на основании чашечки, на половину — на ее боковой поверхности. Basalia имеют такую же высоту, как и radialia. На последних сочленовные для рук площадки имеют уклон наружу и вниз, сильно выемчаты на внутреннем краю, и смежные углы их на этом краю несколько расходятся. В одном интеррадиусе (отмеченном на фиг. 3-*a* стрелкой), очевидно анальном, эти углы сильно расходятся, так что между ними получается большой синус, очевидно в связи с помещением здесь конечной части кишки. В вершине этого синуса, обращенной к периферии, находится кнопкообразное возвышение, диаметром около 1/3 мм, едва различимое простым глазом. В центре основания имеется пятиугольное отверстие,

соединяющее полость чашечки с осевым каналом стебля. На основании отчетливо видны швы, разделяющие его таблички и на краю зубчики, числом 25. Сечение канала в стебле также пятиугольное. Членики стебля цилиндрические, одни более высокие, узловые (нодальные), несущие на себе следы причленения cirri — всего лишь один вырост на каждом членике, диаметром около 1 мм, причем cirri на изображенном (фиг. 5*b*) обломке стебля расположены в двух ближайших нодальных члениках в соседних радиусах. Эти членики высотою 3—3 $^1/_3$ мм. Другого рода членики, интернодальные, высотою 2 $^1/_4$—2 $^1/_2$ мм. Диаметр стебля 4 мм. Есть один низкий членик стебля (фиг. 4), диаметром около 5 мм, высотою 1 мм с 3 зубчиками на периферии, у которого одна поверхность плоская, как это обыкновенно бывает у члеников, а другая слабо выпуклая и вероятно прилежащая к основанию чашечки. Таким образом, можно думать, что, как это нередко бывает, членики стебля, находящиеся близ основания чашечки, имеют меньшую высоту, чем расположенные более далеко от основания. При стебле диаметром в 5 мм чашечка должна быть соответственно более размерами, чем описанная нами. *E. araxensis* отличается от всех известных видов этого рода, по общей форме чашечки его можно сближать с *E. obliquus* Wanner[1] и *E. trinodus* S. Weller,[2] причем он может быть ближе к тиморской, чем к техасской форме, хотя у первой перистом косо расположен к оси чашечки, явление, впрочем, конечно, вторичное. С другой стороны необыкновенно сильное развитие анального синуса в чашечке находит себе аналога лишь в описываемой мною одновременно форме из сицилианской перми.

Spaniocrinus transcaucasicus nov. sp. (табл. I, фиг. 1 *a*, *b*, *c*).

Второй представитель *Poteriocrinidae* мною отнесен, хотя и с некоторым сомнением, к роду *Spaniocrinus* Wanner, единственный известный вид которого описан из тиморской перми.[3] Наша форма представляет три венца табличек, — нижние и верхние базальные и радиальные, в каждом венце по пяти табличек. Анальных не имеется. *Poteriocrinidae* с таким составом чашечки известно немного, всего 7 родов (Wanner loc. cit.),

[1] J. Wanner. Die permischen Echinodermen von Timor, I. Teil, 1916, S. 225—227, Taf. CIII, Fig. 10.

[2] St. Weller. Description of a permian crinoid fauna from Texas. Journ. Geol., vol. XVII, 1909 p. 630, pl. I, fig. 10—11.

[3] J. Wanner Die permischen Krinoiden von Timor. Jaarboek van het Mijnwesen in Nederlandsch Oost-Indië. Verhandelingen, 3-e ged., p. 292, 1921.

из них совершенно несравнимы с нашей формой триасовые *Encrinus* и *Parencrinus*, а также палеозойский *Protencrinus*, остаются *Erisocrinus*, *Notiocrinus*, *Stachyocrinus*, *Spaniocrinus*, все палеозойские роды. Сравнение со *Spaniocrinus* трудно провести полно, так как, с одной стороны, *Spaniocrinus* описан с руками, а у нашей формы они не сохранились, с другой стороны, у нас свободна верхняя поверхность чашечки, а у *Spaniocrinus* она скрыта сомкнутыми основаниями рук. У *Spaniocrinus* basalia принимают значительное участие в построении боковой поверхности чашечки, у нас, если и выходят на эту поверхность, то минимальным образом. Высота чашечки 3 мм; поперечник на верхнем краю $7^1/_4$ мм; заслуживает быть отмеченной (вероятно аномалия) некоторая двусторонняя симметрия в строении основания чашечки, — две смежные таблички его более других (фиг. 1 *c*) радиальные и верхние базальные таблички представляют в центре бугорчатые возвышения. Чашечка немного деформирована, смята в боковом направлении, а таблички базиса, выдававшиеся из куска породы, в котором была лилия, несколько выветрелые, очертания некоторых из них может быть немного отличаются от вида их в состоянии полной сохранности, а центральное отверстие, сообщающееся с питательным каналом стебля, не сохранилось, так же как и впечатление стебля на базисе. Площадки рук для сочленения с radialia имеют уклон наружу и вниз.

Если обособлять семейства *Poteriocrinidae* и *Encrinidae* (имеющие анальные таблички и неимеющие), то и *Erisocrinus* и *Spaniocrinus* трудно поместить в ту или другую группу; они не имеют анальных табличек, но *Erisocrinus*, в связи с присутствием анального хоботка, имеет двустороннюю симметрию в строении верхней стороны чашечки; *Spaniocrinus*, повидимому не имеет двусторонней симметрии, но базис у него слишком велик, чтобы отнести этот род к *Encrinidae*. Их можно считать за *Poteriocrinidae*, переходных к *Encrinidae*, и то, что их можно отнести к *Poteriocrinidae* в обычном понимании этого семейства, без *Encrinidae*, говорит за пермский возраст тех слоев, в которых эти лилии были найдены. Такое же указание в отношении возраста дает и род *Erisocrinus*.

ОБЪЯСНЕНИЕ ФИГ. 1. 3, 4 и 5 ТАБЛИЦЫ I

Фиг. 1 *a, b, c. Spaniocrinus transcaucasicus*; × 3 (в *a* чашечка обращена верхней стороной вниз).

Фиг. 3 *a, b, c. Erisocrinus araxensis* n. sp.; *a* — вид сверху, *b* — снизу, *c* — сбоку; × 3.

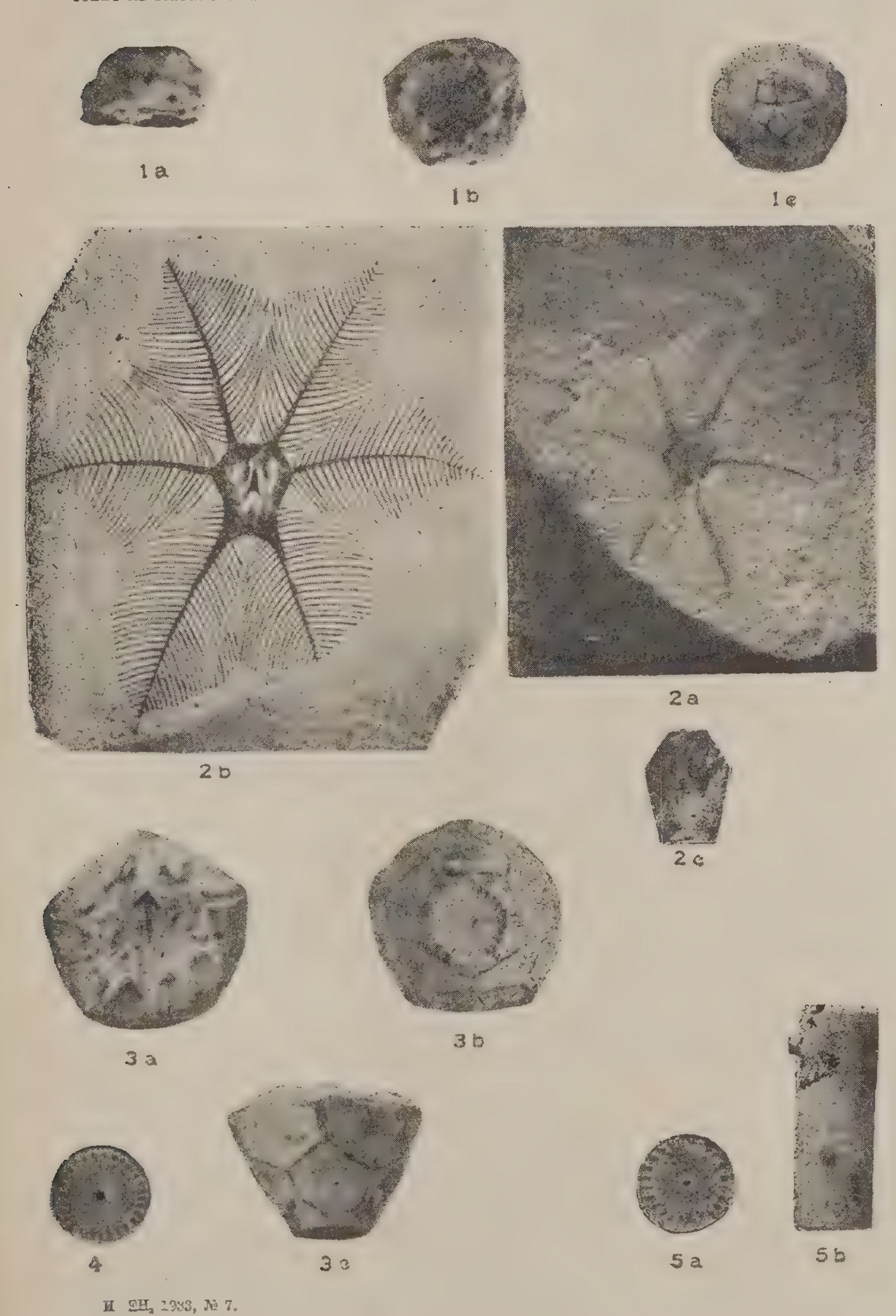
Фиг. 4. Сочленовная поверхность членика стебля третьего экземпляра *E. arax.*, членик, прилежащий к чашечке.

Фиг. 5 *a*. Сочленовная поверхность членика стебля другого экземпляра *E. arax.*; × 3.

Фиг. 5 *b*. Обломок стебля *E. araxensis*; × 3.

Н. Н. Яковлев. а) Две верхнепермские лилии из Закавказья. б) Планктонный граптолит из Казакстана.

Таблица I



ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ПЛАНКТОННЫЙ ГРАПТОЛИТ ИЗ КАЗАКСТАНА

Н. Н. ЯКОВЛЕВА

(*Представлено академиком* **А. А. Борисяком**)

Описываемое ископаемое доставлено мне М. А. Борисяк из сборов, сделанных ею в 1931 г. в районе Караганды, из отложений, принадлежащих, повидимому, к верхнему силуру.

Это ископаемое (табл. I, фиг. 2) представляет центральное тело шестиугольного очертания, в виде неравностороннего двусторонне симметричного шестиугольника, и исходящие от его углов перистые лучи. В центральной части по средней линии вдоль нее и в то же время ближе к одному концу центральной части имеется треугольное впечатление. Отпечаток воском, сделанный с этой центральной части на месте этого треугольного впечатления, дал выпуклое коническое образование, на широком конце которого ясно вырисовывается отверстие, устье воронки, ведущее в ее полость (фиг. 2 *c*). Это обстоятельство при наличии в то же время упомянутых перистых лучей и в связи с буроватым цветом ископаемого, позволяющим предполагать скелет из хитина, сразу дало основание считать описываемый организм за граптолит, причем коническая воронка естественно должна была быть принята за так называемую sicula, представляющую начальную стадию в развитии колоний граптолитов. Этому соответствовали и размеры воронки около $2^1/_2$ мм длиной.

Как сказано, лучи, отходящие от центрального тела, перисты, но перистость не совсем обычная для граптолитов. Аналогичные перышки можно указать только лишь у рода *Rastrites*, считающегося за подрод *Monograptus* и основанного именно на этом своеобразном характере ячеек полипов, на их перистости или шиповидности и разделенности промежутками: устья ячеек у *Rastrites* находятся на концах шипов. Но, подобно

тому, как *Rastrites* является производным от *Monograptus* с расположением ячеек лишь с одного бока несущей их оси, *Planctograptus* должно быть является производным от граптолита более обычного типа, с ячейками не шиповидной формы и расположенными в два ряда, с устьями, направленными в противоположные стороны.

Шиповидный характер ячеек у граптолитов большей частью считается приспособлением, служащим для защиты колонии от неприятелей.

Я лично думаю, что при таком характере шиповатости, как у *Rastrites* и нашего граптолита, когда шипы очень удлинены, и лучи колонии являются тонко перистыми, это не приспособление для защиты, а приспособление к планктонному образу жизни,[1] которое могло возникать неоднократно, в различных группах граптолитов, независимо от родства их.

Центральная часть нашего граптолита находит также себе аналога в так называемом центральном диске, известном, напр. у *Diplograptus foliaceus*, описанного Рюдмэном (Ruedmann) из Сев. Америки и у *Dichograptus octobrachiatus*, причем Рюдмэн отмечает, что у последнего вида бывают не только восьмилучевые экземпляры, но и шестилучевые. Надо сказать, что, как известно, *Diplograptus* и *Dichograptus* относятся к двум совершенно различным группам граптолитов, представляющим наиболее крупные их подразделения, *Axonophora* и *Axonolipa*, снабженных осью и лишенных ее.

Едва ли можно сомневаться, что наш род принадлежит к *Axonophora*, и казалось бы искать ближайшего родства с *Dichograptus* не приходится. С другой стороны, *Axonolipa* считаются дающими происхождение *Axonophora* и, таким образом, соотношения нашего рода к *Dichograptus* или к близким к нему родам являются возможными. Колонии *Diplograptus* с исходящими из общего центра лучами описаны Рюдмэном, но число лучей в них весьма велико, и они соединяются, как в центре, у пневматофора, не проявляющего в своей форме соотношения с числом лучей.

Что касается центрального диска, то, как видно на фиг. 2 *c* он является довольно плоским, хотя с некоторой выпуклостью вдоль средины, в половине, не содержащей sicula, а в части диска, содержащей sicula, представляет большую впадину, в которой расположена sicula. Эта впадина, вследствие несколько утрированной ретуши, кажется глубже, чем на самом деле. Sicula не представляет прямого конуса, но конус с несколько отогнутым острым концом. По бокам устья sicula у нее также, как это вообще бывает

[1] Аналогия с ныне живущим планктонным рачком *Calocalanus pavo* из Копепод, с его перистыми придатками сяжек и хвостового сегмента.

у граптолитов, повидимому, имеются два шиповидных отростка, более длинный с того бока, в сторону которого отгибается острый конец ее.

Из шести лучей, отходящих от центрального диска, средние более близки к одному концу диска, вытянутого в направлении sicula, а именно к концу, к которому обращен острый конец sicula. Между двумя лучами, находящимися с противоположного конца диска, край последнего представляет мелкие различимые в лупу зубчики (может быть основания несохранившихся шипов). Длина диска 10 мм, наибольшая ширина 7.3 мм. Вся sicula лежит в одной половине диска, той, около которой сосредоточены четыре луча. Длина лучей диска, расположенных у конца 27 мм, и срединных лучей 18 мм. Расстояние между ячейками около диска 1 мм.

ОБЪЯСНЕНИЕ ФИГ. 2, ТАБЛИЦЫ I

Фиг. 2. *a*, *b*, *c*. *Planctograptus rastritoides* nov. gen. n. sp. *a* — в нат. вел., *b* — то же, увеличено, реставрировано и перевернуто правой стороной влево, *c* — центральный диск, с отпечатка воском, увелич.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ИЗМЕНЕНИЯ ЖИВОЙ РАСТИТЕЛЬНОЙ КЛЕТКИ ПОД ВЛИЯНИЕМ ХИМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ

1. Ультрамикроскопическое наблюдение над клетками *Allium cepa* [1]

М. Н. МЕЙСЕЛЯ

(*Представлено академиком* **Г. А. Надсоном**)

В недавно прошедшем этапе чисто морфологических методов исследования живого вещества основное внимание исследователей было сконцентрировано на анализе структур, полученных в результате фиксации, и той или иной окраски объекта. Однако, для понимания процессов жизнедеятельности, протекающей в организме, для понимания взаимосвязанности формы и функции этот этап дал сравнительно мало. Введением методов прижизненного наблюдения и окраски (последняя все же не безразлична для живой клетки) — микрургических и коллоидо-химических методов исследования живых объектов — удалось установить ряд важных обстоятельств касательно структуры и жизнедеятельности живого ядра и цитоплазмы. В то время как под влиянием новых фактов наше представление о цитоплазме существенно изменилось, и мы уже не ищем в этой лабильной коллоидной системе неизменной микроскопической структуры, в представлениях о ядре над нами все еще довлеют, как справедливо указывает Strugger, старые морфологические взгляды 70-х годов прошлого столетия. Нельзя также не согласиться с Strugger'ом, что борьбе со статическими взглядами на ядро препятствуют представления о морфологической автономии хромозом, требующие стабильности структуры покоющегося ядра. Само понятие «покоющегося» ядра исключало какое-либо его изменение вне периодов деления.

[1] Доложено на научной конференции Микробиологической лаборатории Акад. Наук СССР 16 марта 1932 г.

Между тем, в свете последних микругических исследований Chambers'a и Peterfi особенно отчетливо выяснилась чрезвычайная чувствительность ядра к внешним воздействиям и огромное значение повреждения тех или иных частей ядра в жизни клетки. Необходимо отметить, что в большинстве цитологических работ, произведенных над живыми объектами, исследователи фиксировали свое внимание то исключительно на цитоплазме, то на ядре. До сего времени имеется тенденция рассматривать ядро как образование, отделенное оболочкой от цитоплазмы и живущее особой малозависящей от цитоплазмы жизнью. Наиболее резкое выражение эта тенденция нашла во взглядах Bütschli, который склонен был рассматривать ядро как первично возникший на Земле организм, который лишь в дальнейшем, в процессе эволюции, в целях защиты от внешних воздействий облекся покровом из цитоплазмы. Такой же точки зрения придерживались Мережковский и Минчин.

Этот взгляд противоречит нашим основным представлениям об эволюции живого вещества. Сложные нуклеопротеиды, а тем более оформленное ядро, явились в результате высокой дифференцировки живого вещества и могли возникнуть лишь в процессе длительной эволюции. Уже Энгельс совершенно справедливо указывал, что ядро должно было возникнуть лишь впоследствии в способном к развитию ряду белковых тел. Понятие о ядре как о весьма относительно, посредственно, связанном с цитоплазмой, породило широко распространенное представление о возможности поражения и изменения цитоплазмы без изменения в ядре и наоборот. Попытки доказать это гистологическими методами (Часовников), конечно, не могут считаться безупречными. Возможность сколько-нибудь глубокого изменения цитоплазмы без сопутствующего изменения ядра кажется с точки зрения взаимосвязанности различных отделов живого вещества мало вероятной. За последнее время появился ряд новых подтверждений более тесной, более интимной связи ядра с цитоплазмой. Так, у бактерий удается наблюдать в зависимости от состояния организмов то более диффузное, рассеянное по цитоплазме, то более компактное расположение ядерного вещества (Покровская). Близкое к этому явлению наблюдается и у *Protozoa*. Saguchi описывает выхождение из ядра и ядрышка в цитоплазму оформленных частиц и зернышек. Наконец, в процессе кариокинеза в метафазе и анафазе, как известно, исчезает ядерная оболочка, и содержимое ядра приходит в непосредственное соприкосновение с плазмой. Точно так же и вакуоли растительных клеток, как указывает Gicklhorn, должны рассматриваться не только как осмотические аппараты или депо для запасных веществ и конечных продуктов обмена,

а как соковые пространства, находящиеся в теснейшей взаимосвязи с живой протоплазмой.

Настоящая работа была предпринята с целью пересмотреть вопрос о ранних стадиях изменения клетки под влиянием различных воздействий под углом зрения интимной взаимосвязанности ядра и цитоплазмы. Естественно, что такого рода исследования требуют прижизненного наблюдения в разнообразных условиях с применением методов, дающих возможность более глубоко заглянуть в характер разыгрывающихся процессов (методы прижизненной окраски, микрургические, коллоидо-химические и т. п.).

В этом сообщении я коснусь лишь результатов, полученных при изучении живых клеток в темном поле (Dunkelfeld). Как ныне известно, покоющееся ядро представляет собою с коллоидо-химической точки зрения полифазную систему, эмульсоид, в состав которой входят по крайней мере два коллоидных вещества: кариотин и кариолимфа (Tischler, Лепешкин, Schaede). Первое является диспергированным веществом, второе диспергентом. В ядре можно наблюдать переходы от состояния гидросоля в обратимый (реверзибельный) гидрогель и обратно (Strugger, Klebs, Hartmann, Schaede). Исследования при освещении в темном поле живых растительных объектов со времени первых работ в этой области Гайдукова повторялись неоднократно. В 1930 г. Guilliermond детально исследовал в темном поле целый ряд растительных клеток. Однако, эти изыскания, направленные к обнаружению структуры и цитоплазмы, не дали сколько-нибудь отчетливых результатов. Schaede пишет: «Man könnte von der Untersuchung im Dunkelfeld Aufschlüsse über den Bau des lebenden Kernes erwarten, doch auch diese Hoffnung hat sich bis jetzt als trügerisch erwiesen».

Еще решительнее по поводу существующих методов исследования живого вещества высказывается Гайдуков. Он считает, что, несмотря на применение совершенных морфологических, физиологических, микрохимических, физико-химических, и т. п. исследований протоплазмы, природа живого вещества осталась неразгаданной. Требуя на нашем исторически ограниченном этапе познания живого вещества абсолютного разрешения проблемы его структуры и не видя возможности разрешить его применяющимися ныне методами, Гайдуков предлагает совершенно от них отказаться и заменить их более общими определениями поля и градиента (Гурвич, Child).

Не считая физико-химические методы исследования способными разрешить нацело проблему структуры и жизнедеятельности живого вещества, мы все же полагаем, что эти методы еще далеко не исчерпали себя и могут

дать не мало при условии правильного понимания качественной специфичности живого вещества.

Вопросы, связанные с прижизненными структурами ядра, наблюдаемого при обычном освещении в микроскоп, достаточно подробно рассмотрены в работах Martens'a и в обзорной статье Schaede, и мы здесь на них останавливаться не будем. При наблюдении в темном поле большинство исследователей принуждено было констатировать, что цитоплазма является оптически пустой, ядро же в различных случаях может быть то оптически пустым, то более или менее интенсивно опалесцирующим (Гайдуков, Fauré — Fremiet, D. Aggazoti, Marinesco, Price, Lapique Bequerel, Guilliermond и др.) Все авторы согласны с тем, что ядрышко всегда оптически пусто. Казалось бы, действительно, при таком положении дела дальнейшие ультрамикроскопические исследования излишни. Lapique, Bequerel и Guilliermond предприняли ультрамикроскопическое изучение процессов коагуляции цитоплазмы и ядра в клетках растений. В нормальной оптически пустой протоплазме с началом коагуляции появляется сперва легкая муть, как бы облачность, которая вскоре переходит в резко блестящую зернистую массу. Подобные же картины описываются и дла ядра. Strugger в опытах над большими ядрами *Chara fragilis* наблюдал, как, будучи в нормальных условиях оптически пустыми, они при повреждении еще живой цитоплазмы приобретают вначале диффузную голубоватую опалесценцию амикронного характера. Через несколько минут в ядре появляются серебристые частички, вскоре наполняющие ядро и находящиеся в интенсивном броуновском молекулярном движении. В дальнейшем наблюдается соединение этих частичек в аггрегаты и коагуляция ядра.

Цитоплазма и ядро мертвых клеток резко отличаются в темном поле интенсивно белой, крупной блестящей грануляцией.

Значительный шаг вперед в ультрамикроскопическом изучении живого вещества, повидимому, удастся сделать с помощью нового объектива Spierer'a, дающего, по словам Seifriz, возможность различать в живой цитоплазме две составные части: мелкогранулярную, сильно блестящую субстанцию и оптически пустую основную субстанцию.

Нашей задачей явилось ультрамикроскопическое изучение ранних стадий изменения живого вещества под влиянием различных внешних воздействий. Klebs первый нашел обратимые структурные изменения в ядре *Euglena* под влиянием давления. Chambers в своих опытах отмечает легко возникающее раннее изменение ядра. По данным Strugger'a, погружением клеток в раствор с различной концентрацией водородных ионов можно

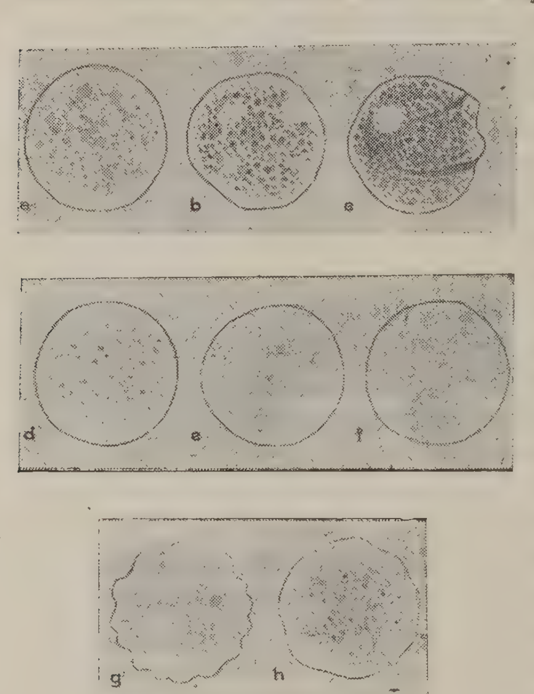
вызвать реверзибельное гелеобразование в ядре. Hartmann установил исчезновение структуры ядра у *Elodea canadensis* при повышении температуры. Weber обнаружил в ядрах замыкающих клеток *Vicia faba* реверзибельные золь-гель переходы. То же самое наблюдалось у животных клеток при действии слабой уксусной кислоты (Herwerden). Guilliermond указывает, что изменения клеток характеризуются усилением опалесценции ядра. Однако, систематических исследований, выясняющих оптические изменения ядра в связи с характером изменения цитоплазмы, произведено не было.

Нами исследовались клетки эпидермиса чешуй лука (*Allium cepa*) в изотоническом растворе сахарозы или в водопроводной воде, в которой клетки остаются довольно долго живыми и без существенных изменений. Освещение в темном поле получалось при помощи параболоид-конденсора фирмы Рейхерт.

Источником света служила Punktlichtlampe. Исследования производились обычно с иммерсионным объективом 1/12 и компенсационным окуляром 8 и 12. Изучалось влияние медленного отравления алкоголем (15—20%), цианистым калием (1 : 3000 и 1 : 5000) и мышьковистой кислотой (1 : 6000), действие плазмолиза (30% сахароза) и прижизненная окраска ядер смесью эритрозина с KNO_3 (по A. Paltauf). Сначала необходимо остановиться на ультрамикроскопической картине нормальной клетки *Allium cepa*. Цитоплазма, как то описывалось уже многократно, оптически пуста. Только при очень сильном освещении удается в некоторых случаях наблюдать легкую опалесценцию цитоплазмы. Движение плазмы обнаруживается вследствие оживленного перемещения ярко блестящих микрозом. (P. Bequerel). Правильное быстрое скольжение микрозом являлось для нас критерием нормального состояния клетки. Ядро обычно круглое, иногда не совсем правильной формы, хорошо заметно в темном поле вследствие большей или меньшей опалесценции. Ядрышко всегда оптически пустое. Состояние клеток значительно различается в зависимости от слоя чешуи, из которого они взяты. В наилучшем состоянии находятся клетки из средних чешуй луковицы. В наружных чешуях движение микрозом обычно медленнее и менее правильно, ядро или оптически пусто или слабо опалесцирует. Нередко ядро имеет резко складчатую поверхность (фиг. 1*g*).[1] После перенесения в воду или в изотонический раствор сахарозы удается наблюдать в связи с оживлением движения микрозом некоторое набухание ядра, исчезновение складок, более интенсивную опалесценцию его и появление в ядре мелкой равно-

[1] По техническим причинам на рисунках даны негативные изображения картин, наблюдаемых в темном поле.

мерной грануляции (фиг. 1 *h*). Ядра клеток эпидермиса из средних слоев чешуи обычно слегка опалесцируют. На основном равномерно опалесцирующем фоне удается различить еще мелкую равномерную гранулярность (фиг. 1 *a*). Быть может равномерно опалесцирует кариолимфа, а гранулы принадлежат кариотину. В клетках из прорастающих луковиц наблюдаются значительно более мощные тяжи цитоплазмы, слегка опалесцирующие в темном поле, и очень оживленное перемещение микрозом. Ядро в этих клетках значительно резче опалесцирует и имеет гораздо более крупную и густую гранулярность, чем в клетках покоющихся луковиц. Таким образом, мы вправе заключить, что оптическая картина ядра находится в зависимости от состояния жизнедеятельности клетки: чем ниже физиологические процессы в клетке, характеризующиеся замедлением движения цитоплазмы, тем ближе ядро по виду своему в темном поле приближается к оптически пустому.



Фиг. 1.

Осторожное пропускание слабого алкоголя под покровное стекло при одновременном наблюдении за одной и той же клеткой дает возможность проследить все фазы ее изменения.

Изменения клеток эпидермиса *Allium cepa* под влиянием лучистой энергии были описаны Г. А. Надсоном и Э. Я. Рохлиной-Глейхгевихт, под влиянием хлороформа — Г. А. Надсоном и М. Н. Мейселем. Однако, при освещении в темном поле удается видимо уловить значительно более ранние и тонкие изменения клеток.

При действии алкоголя уже довольно быстро начинают обнаруживаться изменения в ядре. Ядро становится более отчетливо видимым, увеличивается его опалесценция. Одновременно, при осторожном прибавлении к препарату

алкоголя, можно наблюдать изменение формы ядра: то тут, то там появляются на поверхности ядра выступы и складки, которые могут исчезнуть или изменить свои очертания (фиг. 2*B*).[1]

Явление подобного рода в хондриозомах описаны Миловидовым для *Saprolegnia*, изменение очертания вакуоли в связи с изменением и преходящей контрактацией цитоплазмы описаны для высших растений Küster'ом и Gicklhorn'ом, для дрожжевых грибков Г. А. Надсоном и Е. А. Штерн. Изменения формы хлоропластов под влиянием внешних воздействий наблюдались Küster'ом. Интересные преходящие амебоидные движения пластид при плазмолизе клеток эпидермиса *Orchis latifolia* и *Orchis maculata* видел Gicklhorn. Таким образом и ядро подчиняется тем же закономерностям и на известных стадиях раздражения способно отвечать изменениями своей формы. Не последнюю роль играют здесь, повидимому, процессы частичного набухания и отбухания, а также несомненно имеющее место колебание вязкости и изменение поверхностного натяжения на границах ядра и цитоплазмы. При этих же условиях нередко удается наблюдать следующие интересные явления: контуры ядра, обычно хорошо заметные, в каком-либо месте исчезают, и из ядра в плазму прорывается некоторое количество мелкозернистого вещества. Выброшенные из ядра зернышки сперва интенсивно броунируют, затем бесследно исчезают. Контуры ядра снова восстанавливаются и делаются хорошо заметными. Необходимо отметить, что все это происходит в мало поврежденной клетке при наличии оживленного, даже более ускоренного, чем в норме, движения микрозом (стимуляция).

В самом содержимом ядра также происходят некоторые изменения. В мелко гранулярном, равномерно опалесцирующем ядре появляются местами и вновь исчезают участки большей или меньшей величины, являющиеся оптически пустыми и потому довольно резко выделяющиеся на белесоватом фоне ядра (фиг. 1*b*). Видимо здесь происходит местное реверзибельное повышение дисперсного состояния. В дальнейшем уже наступает токсическое действие. Движение микрозом (цитоплазмы) замедляется, становится толчкообразным. Отдельные микрозомы начинают броунировать (разжижение протоплазмы). Ядро резко опалесцирует, в нем появляются довольно крупные блестящие гранулы. На поверхности ядра вследствие некоторого сжатия его, возникают складки (фиг. 1*c*). За этой стадией быстро наступает полный наркоз. Микрозомы почти не перемещаются, ядро резко контури-

[1] На фиг. 2 видны фазы обратимых изменений формы и оптической картины ядра при действии алкоголя. *A* — исходное состояние клетки, *B* — фаза стимуляции, *C* — фаза наркоза.

рованное, ярко блестящее, с крупными гранулами, часть которых расцвечена розовыми и зеленоватыми тонами (фиг. 2*c*). Однако, даже столь далеко зашедшие изменения обратимы: если начать промывку препарата, то вскоре удается видеть происходящее на глазах уменьшение гранулярности и опалесценции ядра и одновременно с этим возобновление движения



Фиг. 2.

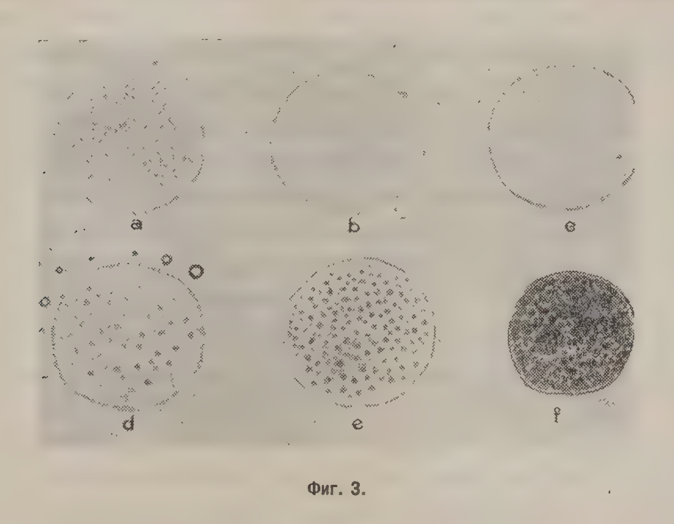
цитоплазмы (микрозом). Более длительнео воздействие алкоголя приводит в конечном счете к коагуляции цитоплазмы и ядра, как это описано Lapique'ом Bequerel'ем и Guilliermond'ом.

Необходимо отметить, что ядра погибших клеток, подвергнувшиеся необратимой коагуляции, в оптическом отношении резко отличаются (фиг. 3*f*) от ядер клеток, находящихся даже в состоянии глубокого наркоза (фиг. 3*e*), своим более интенсивным белым цветом и наличием вместо равномерных блестящих гранул неправильного тусклого комковатого коагулята. Изме-

нения, сходные в общих чертах с только что описанными, вызывают в клетках *Allium cepa* и пары хлороформа.

Таким образом, мы вправе считать, что действие наркотических веществ типа алкоголя и хлороформа вызывает уже на ранних стадиях (стадия возбуждения) изменения цитоплазмы, идущие параллельно с обратимыми изменениями дисперсного состояния ядра, отражающимися на его оптической картине при освещении в темном поле.

На ряду с изучением действия на клетку упомянутых выше агентов исследовалось действие веществ, угнетающих окислительные процессы. Для



Фиг. 3.

этой цели кусочки эпидермиса чешуи исследовались в слабых растворах цианистого калия и мышьяковистой кислоты. Цианистый калий вызывает постепенное замедление движения цитоплазмы и идущее параллельно с этим резкое повышение дисперсности коллоидов ядра. Ядро постепенно гомогенизируется и, наконец, становится оптически пустым (фиг. 3 *a*, *b*, *c*). В некоторых случаях ядро настолько просветляется, что его удается различить лишь с большим трудом (фиг. 3 *c*; *a* — контроль). Guilliermond получил сходные результаты при воздействии на живую клетку щелочей, и можно было бы предполагать, что просветляющее действие цианистого калия зависит от его щелочной реакции. Однако, опыты с действием на клетки мышьяковистой кислоты заставляют считать механизм этого явления более сложным. Слабый раствор мышьяковистой кислоты (1 : 6000) вызывает также скоро наступающее уменьшение дисперсности коллоидов ядра (фиг. 1 *d*, *e*, *f*), причем в первую очередь исчезает опалесценция и остаются лишь сероватые

гранулы на темном основном фоне ядра. Все это сопровождается замедлением движения цитоплазмы.

Итак, столь разные по химической структуре вещества, как мышьяковистая кислота и цианистый калий, но обладающие близким физиологическим действием, дают сходную картину изменений оптических свойств ядра. Окрашенные прижизненно эритрозином в присутствии KNO_3 ядра также являются оптически гомогенными.

Сопоставляя наши данные с исследованиями A. Paltauf и Насонова, показавшими, что прижизненная окраска ядра наступает при понижении жизнедеятельности (особенно окислительных процессов) клетки, мы в праве предположить, что оптически пустое ядро в клетках *Allium cepa* является одним из признаков понижения окислительных процессов. С другой стороны, понижение окислительных процессов, как выяснилось, вызывает сдвиг реакций протоплазмы и ядра клетки в сторону щелочности, которое, в свою очередь, и может обусловить описанное выше повышение дисперсности.

Наконец, следует отметить, что оптическая картина клетки изменяется и при явлении плазмолиза. Будучи помещены в раствор 30% сахарозы, клетки *Allium cepa* довольно быстро плазмолизируют. При этом наблюдается легкая опалесценция цитоплазмы, особенно в местах отхождения ее от стенок оболочки, и значительное повышение опалесценции и гранулярности ядра.

Таким образом, как в физиологических условиях, так и при воздействии различных агентов, различные, иногда едва заметные изменения цитоплазмы сопровождаются одновременным изменением оптической картины ядра. Эти оптические изменения ядра несомненно отражают легко подвижный изменчивый характер жизнедеятельности клетки.

ВЫВОДЫ

1. Ядра живых клеток эпидермы *Allium cepa* обнаруживают при наблюдении в темном поле все переходы от легкой равномерной опалесценции до относительно резко выраженной зернистости. Наблюдения показывают, что оптическая картина ядра находится в полной зависимости от физиологического состояния клетки.

2. Незначительное изменение в жизнедеятельности клетки отражается на оптической картине ядра. В пределах физиологических условий понижение жизнедеятельности (замедление движения цитоплазмы) сопровождается гомогенизацией ядра и приближением его к оптически пустому.

Наоборот, усиление до некоторых пределов опалесценции основной субстанции ядра и появление в нем равномерной грануляции происходит при повышении жизнедеятельности клетки.

3. Наркотические вещества типа алкоголя и хлороформа вызывают уже в первой стадии возбуждения (усиление движения цитоплазмы) заметное увеличение опалесценции и гранулярности ядра. При этом удается наблюдать преходящее изменение контуров ядра, напоминающее амебоидные движения. Полный наркоз сопровождается резкими помутнением ядра, сильной опалесценцией и крупно гранулярным строением его. Эти изменения обратимы.

4. В начальных стадиях действия алкоголя на клетку удалось наблюдать выхождение из ядра мелкозернистого вещества, после чего ядро вновь принимает прежний вид.

5. Ядра мертвых клеток при освещении в темном поле значительно отличаются от ядер живых, находящихся в наркозе клеток, более резким белым цветом и грубой комковатостью содержимого.

6. Цианистый калий и мышьяковистая кислота вызывают в общем сходные изменения ядра, приводя к уменьшению опалесценции основной субстанции и уменьшению гранулярности. Цианистый калий вызывает изменения, часто сопровождающиеся переходом ядра к оптически пустому. Таким образом, понижение окислительных процессов сопровождаются оптической гомогенизацией ядра.

7. Процесс плазмолиза клетки сопровождается усилением опалесценции и гранулярности ядра.

Микробиологическая
лаборатория Академии
Наук СССР. 1933 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bělař, K. Der Formwechsel der Protistenkerne. Ergebn. Fortschr. Zool., 6, 1926.
2. Chambers. The effect of experimental induced changes in consistency on protoplasmic movement. Proc. Soc. Exp. Biol. Med., 1921.
3. —— Micrurgical studies on the tonoplast of *Allium cepa*. Protoplasma, 12, 1931.
4. Gicklhorn, J. Intracelluläre Myelinfiguren und ähnliche Bildungen bei der reversiblen Entmischung des Protoplasmas. Protoplasma, 15, 1932.
5. —— Vorübergehende Formveränderungen von Plastiden während der Plasmolyse. Protoplasma, 15, 1932.

6. Guilliermond. Recherches ultramicroscopiques sur les cellules végétales. Rev. gén. de Botan., 42, 1930.
7. —— La structure des cellules végétales à l'ultramicroscope (Sammelreferat). Protoplasma, 16, 1932.
8. Hartmann O. Über den Einfluss der Temperatur auf Plasma, Kern und Nucleolus und cytologische Gleichgewichtszustände. Arch. f. Zellforsch., 15, 1917.
9. Herwerdan M. Reversible Gebildung in Epithelzellen der Froschlarve und ihre Anwendung zur Prüfung auf Permeabilitätsunterschiede in der lebenden Zellen. Arch. f. exp. Zellforsch., 1, 1925.
10. Herwerden. Umkehrbare Gelatinierung durch Temperaturerhöhung bei einer Süsswasseramoebe. Protoplasma, 2, 1927.
11. Yamaha, G. Über die Lebendbeobachtungen der Zellstrukturen, nebst dem Artefaktproblem in Pflanzenzytologie. Bot. Mag., Tokyo, 40, 1926.
12. Klebs, G. Über die Organisation einiger Flagellatengruppen und ihre Beziehungen zu Algen und Infusorien. Untersuch. a. d. Botan. Inst., Tübingen, 1, 1883.
13. Küster. Flora, 100, 1910.
14. —— Protoplasma, 1, 1926.
15. Martens. Recherches expérimentales sur la cinèse dans la cellule vivante. La cellule, 1927.
16. Milovidov. Observations vitales sur l'altération du chondriome chez le *Saprolegnia* sous l'influence de divers facteurs externes. Rev. gén. de Botan., 41, 1929.
17. Лаховский. Ультрамикроскопические исследования Парамеций. Русск. арх. протистологии, 5, 1926.
18. Leblond, B. Le passage de l'état de gel á l'état de sol dans le cytoplasme vivante. C. R. Soc. Biol., 1919.
19. Nadson et Rochline. L'effet des rayons X sur le protoplasme et le noyau de la cellule végétale d'aprés les observations sur le vivant. C. R. Soc. Biol., 94, 1926.
20. Nadson et Meissel. Le mécanisme d'action du chloroforme sur le protoplasme, le noyau et le chondriome des cellules d'*Allium cepa*. C. R. Acad. des Sc., Paris, 183, 1926.
21. Надсон и Рохлина. О действии ультрафиолетовых лучей ртутно-кварцевой лампы на хлорофиллоносную клетку. Вестник рентген. и радиол., 6, 1928.
22. Nagel. Über die Wirkung verschiedener Faktoren, insbesondere narkotisierender Substanzen auf die vitale Methylenblaufärbung bei in vitro gezüchteten Fibrocyten. Ztschr. f. Zellforsch. und mikrosk. Anat., 13, 1931.
23. Nassonov, D. Über den Einfluss der Oxydationsprozesse auf die Verteilung von Vitalfarbstoffen in der Zelle. Ztschr. f. Zellforsch. und mikr. Anat., 11, 1930.
24. Paltauf, Annie. Die Lebendfärbung von Zellkernen. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien Math. nat. Kl., Abt. 1, 137, 1928.
25. Peterfi und Naville. Die Wirkung des Kernanstiches auf das Protoplasma der *Amoeba sphaeronucleus*. Protoplasma, 12, 1931.
26. Price, R. Some studies on the structure of the plant cell by the method of dark-ground illumination. Ann. of Botany, 28, 1914.
27. Рохлина-Глейхгевихт. Влияние радона на хлорофиллоносную клетку. Вестн. рентгенол. и радиол., 8, 1930.
28. Saguchi. Zytologische Studien, Kanazawa, 1930.
29. Sakamura, T. Chromosomenforschung an frischen Material. Protoplasma, 1, 1927.
30. Schaede. Die Kolloidchemie des pflanzlichen Zellkernes in der Ruhe und in der Teilung. Ergebn. Biol., 5, 1929.
31. Seifriz, W. The structure of protoplasm. Science, 1, 1931.
32. Strangeways and Canti. The living cell in vitro, as shown by darkground illumination and the changes induced in such cells by fixing reagents. Quart. J. micr. sience, 72, 1927
33. Strugger, S. Untersuchungen über den Einfluss der Wasserstofflonen auf das Protoplasma der Wurzelhaare von *Hordeum vulgare*. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss., Wien, M.-Nat. Kl., 1, 1926.

34. Strugger, S. Zur Kolloidchemie des ruhenden Zellkernes. Mitt. naturw. Ver. Neuvorpommern. 57, 58, 1931.
35. Tschassownikow, N. Über die Wirkung der Röntgenstrahlen auf den feinen Bau der Leberzellen beim Frosch. Virchow's Archiv, 269, 1928.
36. Weber, F. Cytoplasma-und Kern-Zustandveränderungen bei Schliesszellen. Protoplasma 2, 1927.

M. MEISSEL. VERÄNDERUNGEN DER LEBENDEN PFLANZLICHEN ZELLEN BEI EINWIRKUNG CHEMISCHER AGENZIEN. 1. ULTRAMIKROSKOPISCHE BEOBACHTUNGEN AN ZELLEN VON *ALLIUM CEPA*

ZUSAMMENFASSUNG

Es wurden bei Dunkelfeldbeleuchtung die frühen Stadien der Veränderungen untersucht, die im Kerne der Epidermiszellen von *Allium cepa* bei Einwirkung kleiner Dosen von Alkohol, Cyankali und Acidum arsenicosum sich abspielten.

1. Die Kerne der lebenden Epidremiszellen von *Allium cepa* zeigen bei Beobachtung im dunklen Feld alle Übergänge von eines leicht gleichmässigen Opaleszenz bis zur relativ scharf angeprägten Körnelung. Die Beobachtungen zeigen, dass das optische Bild des Kernes von physiologischen Zustand der Zelle völlig abhängt.

2. Unbedeutende Veränderungen in der Lebenstätigkeit der Zelle finden ihren Wiederhall im optischen Bilde des Kernes. Innerhalb der Grenzen der physiologischen Bedingungen wird die Abschwächung der Lebenstätigkeit (Verlangsammung der Cytoplasmabewegung) durch Homogenisation des Kernes und Annäherung desselben zu einem optisch leeren Gebilde begleitet. Bei gesteigerter Lebenstätigkeit der Zelle dagegen findet gewissermassen stärkere Opaleszenz der Grundsubstanz des Kernes und Auftreten in ihnen einer gleichmässiger Granulierung statt.

3. Narkotika von Alkohol — resp. Chloroform Typus rufen bereits in ersten Stadium, das als Erregungsstadium Verstärkung der Cytoplasmabewegung genannt werden kann, merkliche Zunahme der Opaleszenz und Granulierung des Kernes. Dabei lassen sich vorübergehende Änderungen der Kernkontur beobachten, die an amoeboiden Bewegungen erinnern. Volle Narkose wird durch Trübung des Kernes, starke Opaleszenz und Auftreten von grobgranuliertem Bau desselben begleitet. Diese Umwandlungen sind reversibel.

4. In den Anfangsstadien der Einwirkung des Alkohols auf die Zelle liess sich Austreten aus dem Kern einer fein granulierten Substanz beobachten. Woraufhin der Kern seinen früheren Habitus wiederannimmt.

5. Die Kerne des abgestorbenen Zellen unterscheiden sich bei Dunkelfeldbeleuchtung in bedeutender Weise von den Kernen lebender narkotisierter Zellen durch grellere weisse Farbe; auch besteht ihr Inhalt aus Klumpen.

6. Cyankali und Acidum arsenicosum rufen im allgemeinen analoge Kernveränderungen hervor — es findet Herabsetzung der Opaleszenz der Grundsubstanz und Abnahme der Granulierung statt. Cyankali ruft Veränderungen hervor, die des öftern durch Verwandelung des Kernes in ein optisch leeres Gebilde begleitet werden.

Also wird Herabsetzung des Oxydationsprozesses durch optishe Homogenisation des Kernes begleitet.

7. Der Prozess der Zellplasmolyse wird durch Verstärkung der Opaleszenz und Granulierung des Kernes begleitet.

Mikrobiologisches Laboratorium
der Akademie der Wissenschaften d. UdSSR.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ПРОБЛЕМА МЕТОПИЗМА В СВЕТЕ РЕНТГЕНОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ[1]

Д. Г. РОХЛИНА и А. Е. РУБАШЕВОЙ

Метопизмом, как известно, называют длительное или постоянное сохранение лобного шва (sut. frontalis s. sut. metopica). Вопрос о метопизме привлекал к себе внимание еще Аристотеля, а затем Везалия, Риолана и наконец многих современных анатомов и антропологов. Однако и в настоящее время все еще нет единого толкования сохранения этой инфантильной особенности у взрослого человека. Метопизм пытались объяснить формой черепа, затем влиянием патологических процессов, разыгрывающихся внутри черепа; были попытки связать метопизм с разнообразным заболеваниями желез с внутренней секрецией. Однако, эти предположения должны быть рассмотрены как уже пройденные этапы в истории проблемы метопизма. К указанному взгляду мы пришли на основании собственных исследований и критического изучения литературных данных. Из наших данных в этом отношении представляют наибольший интерес те особенности черепа, которые хорошо прослеживаются рентгенографически, а именно особенности sinus frontalis и sella turcica. Мы однако учли и иные признаки, которые позволяют судить о конституциональных особенностях обладателя данного черепа (более подробно эти данные изложены нами в иной работе).

У человека sut. metopica представляет собою возрастную особенность детского черепа. Облитерация этого шва начинается в средней трети на эндокраниальной поверхности в течение первого года жизни [Велькер (Welcker), Раубер (Rauber)], быстро распространяясь в направлении темен-

[1] Доложено 14 февраля 1933 г. в Антропологической секции Научного совещания Института антропологии и этнографии Академии Наук СССР.

ных костей и медленнее в направлении носовых (Велькер). Полное слияние лобного шва наступает у подавляющего большинства людей в раннем детском возрасте.

Анучин указывает, что частота сохранения лобного шва у взрослого неодинакова у различных рас. У белой расы метопизм наблюдается в 8.2%, у монголов — 5.1%, у негров — 1.2%, у австралийцев — 1%.

Сенильная облитерация лобного шва взрослого протекает в той же последовательности (Велькер).

На нашем материале в 110 метопических черепов[1] из коллекций Института антропологии и этнографии (ИАЭ) sut. metopica на всем протяжении наблюдалась в 101 случае, облитерация средней трети лобного шва в 2 случаях, облитерация двух верхних третей — в 7 случаях.

Рентгенографическое исследование и изучение черепного материала было произведено в Рентгено-антропологической лаборатории Гос. Рентгенологического, радиологического и ракового института.

Велькер, Яшинский, Веллуда (Velluda) указывают, что при наличии sut. metopica окостенение всех черепных швов наступает позднее. На нашем материале неслияние всех черепных швов наблюдалось в 60% (± 4.7%),[2] тогда как на 80 контрольных черепах неслияние черепных швов отмечалось в 26.2% (± 4.9%).

Брока (Broca) наблюдал на метопических черепах сохранение эмбриональных швов. На нашем материале сохранение sut. mendosa при наличии лобного шва имело место в 13.9%, на контрольном материале лишь в 5.5% Sut. squamo-mastoidea наблюдалась нами на метопических черепах в 3.4%, на контрольных мы ее не наблюдали ни разу.

Таким образом ювенильные и инфантильные особенности наблюдаются на метопических черепах чаще, чем на контрольных черепах.

Добавочные кости черепа наблюдались на нашем контрольном материале в 53.3% (± 5.5%), на метопических черепах немного чаще,

[1] Метопические черепа представлены материалом смешанным; 63 черепа из различных раскопок на территории СССР. (напр. Новгородские коллекции — 17 черепов, Крым — Эски — Кермен — 19, раскопки в Херсонской губ. — 3, в Приладожьи — 6, в Ленинградской обл., — 8 и т. д.), 23 черепа русских, 4 — бурят, 3 чукчей, 4 — финнов, 4 — караимов, 3 — айнов и т. д. — Контроль: 133 черепа, — также смешанный материал, распределяющийся в общем так же, как и метопический.

Среди метопических черепов имелось 5 с сохранением Synchondrosis spheno-occipitalis, среди контрольных 4. Остальные черепа как метопические, так и контрольные принадлежат взрослым.

[2] В скобках указана средняя квадратическая ошибка.

в 71.5% (4.4%). Папийо и Таварес (Papillault, Tavares) также указывают на большую частоту добавочных костей на метопических черепах.

Мы считаем заслуживающим интереса состояние protuberantia occipitalis externa. Резко выраженная в рентгеновском изображении protuberantia occipitalis ext. (в виде клюва) наблюдалась нами на метопических черепах в 38.1% (± 6.6%), на контрольных — в 67.2% (± 4.2%). Мы в дальнейшем остановимся на значении этого признака.

Имеется большое количество гипотез, объясняющих сохранение лобного шва у взрослого. Исходя, однако, из нашего опыта, мы должны притти к выводу, что научная ценность их неодинакова, больше того, — что некоторые взгляды явно устарели.

Наиболее старая гипотеза, так называемого компенсаторного метопизма (Вихров), объясняет незарощение лобного шва относительно ранним окостенением синхондрозов основания черепа.

Эта в общем «механистическая» гипотеза сводит проявления чрезвычайно сложного процесса к игре, так сказать, двух «затворов» костного ложа головного мозга. «Узость» (стенократия) основания черепа компенсируется с точки зрения данной гипотезы длительным сохранением sut. metopica. Эта гипотеза, однако, опровергается следующими фактами. Во-первых, sut. metopica окостеневает значительно раньше, чем наступает окостенение synchondrosis spheno-occipitalis. Далее, учитывая «игру двух затворов», нужно было бы сделать вывод, что по сравнению с меньшинством — т. е. с обладателями метопических черепов — у большинства людей, у которых sut. metopica окостеневает рано, компенсаторно должен длительнее сохраняться (и следовательно не окостеневать) synch. spheno — occipitalis. В действительности же при наличии sut. metopica, как это было выше указано, наблюдается более длительное сохранение всех швов, а на контрольных черепах наоборот — более раннее исчезновение всех швов. Иначе говоря эти «затворы» в костном ложе головного мозга «функционируют», а также и закрываются, не обнаруживая викарной компенсации. Таким образом теория «компенсаторного метопизма» не подтверждается анализом фактического материала.

Симон (Simon), Поммероль (Pommerol), Брока (Broca) связывают метопизм с патологическим повышением внутричерепного давления.

На рентгенограммах черепа в соответствующих случаях отчетливо прослеживались бы косвенные следы повышения внутричерепного давления, а именно — углубленные и расширенные impressiones digitatae и крутые juga cerebralia. Sinus sphenoidalis в соответствующих случаях пнев-

матизируется усиленно и преждевременно: размеры турецкого седла увеличиваются.

Все вышеуказанные рентгенологические симптомы повышения внутричерепного давления безусловно отсутствовали на наших метопических черепах. Следовательно, связать длительное наличие sut. metopica с патологическим повышением внутричерепного давления нельзя.

Велькер и Папийо (1892) рассматривают метопизм как прогрессивный признак. Они связывают длительное сохранение sut. metopica у человека со значительным развитием лобных долей. В этих взглядах на происхождение метопизма, как и в теории ослабления экстракраниального мышечного давления на лобную кость (Болк, Масловский) правильно улавливается связь между особенностями окостенения черепа и эволюцией организмов. Болк связывает сохранение срединного шва с ослаблением давления височных мышц на лобную кость; Масловский — с редукцией жевательного аппарата.

На новейшие взгляды на метопизм оказали большое влияние успехи эндокринологии. Однако, наряду с вполне обоснованными положениями, наблюдается целый ряд увлечений, а подчас и заблуждений.

Среди так называемых «эндокринных теорий» метопизма мы различаем две группы. Одни воззрения сводятся к тому, что метопизм наблюдается у таких конституциональных типов, которые характеризуются своеобразным эндокринным сдвигом, а именно сохранением некоторых инфантильных особенностей.

Так по мнению Болка (1926) человеческий организм по сравнению с приматами, характеризуется замедлением ряда морфогенетических процессов. Согласно этому взгляду метопизм представляет частичное проявление удлинения некоторых фаз роста. Мы в общем согласны с этим взглядом. В пользу этого подхода свидетельствует большое количество ювенильных и инфантильных признаков, наблюдаемых на метопических черепах.

Во второй группе «эндокринных теорий» метопизм рассматривается как проявление патологических изменений в работе эндокринного аппарата, а не как частичное проявление конституционального своеобразия эндокринной формулы. Так, Папийо (1928) видит в метопизме аномалию окостенения, обусловленную нарушениями функции вилочковой железы. Ожиэ (Augier), оспаривая роль вилочковой железы, склонен искать объяснение в изменениях гипофиза, сопровождающихся удлинением периода роста.

Что касается влияния вилочковой железы, то сторонники этого взгляда исходят, однако, лишь из гипотетических рассуждений и пока еще не могут опереться ни на клинические картины, ни на данные гистологического исследования.

Что касается роли гипофиза (очевидно имеется в виду передняя доля гипофиза), то о гипоплязии и пониженной функции передней доли гипофиза говорить не приходится, ибо тогда наблюдался бы недостаточный и даже карликовый рост.

Гиперплязия и повышенная функция передней доли гипофиза в качестве конституциональных особенностей растущего организма связаны с увеличением размеров, а в дальнейшем постепенно выявляется так называемый акромегалоидный habitus. Обладатели метопических черепов, однако, не являются ни гигантами, ни людьми высокого роста. Что же касается так называемого акромегалоидного habitus'а, то на черепе он выразился бы в увеличении размеров турецкого седла, в значительном развитии сильно пневматизированного sin. frontalis и sin. sphenoidalis и в раннем обизвествлении места прикрепления lig. nuchae. Состояние лобных пазух мы исследовали на 110 метопических и 80 контрольных черепах из коллекции ИАЭ (см. примечание на стр. 998).

Для изучения состояния лобных пазух всех этих черепов были сделаны снимки в передней проекции при однотипной укладке на лоб. Состояние лобных пазух изучалось путем измерения максимального вертикального размера, максимального горизонтального, а также поперечника перегородки.

На нашем метопическом материале отсутствие лобных пазух было обнаружено в 28% (± 4.2%), наличие односторонних лобных пазух — в 16.3% (± 3.5%).

На нашем контрольном материале отсутствие лобных пазух наблюдалось в 7.5% (± 2.9%), односторонние лобные пазухи наблюдались в 11.2% (± 3.5%), (см. табл. 1 на стр. 1002).

Средние размеры лобных пазух метопических черепов меньше таковых контрольных черепов (см. табл. 1).

Итак, метопические черепа характеризуются в общем более слабым развитием, а нередко и полным отсутствием лобных пазух. Это обстоятельство свидетельствует об отсутствии акромегалоидного акцента у обладателей метопических черепов. Об этом же говорит отсутствие резко выраженной protuberantia occipitalis ext.

Пневматизация sin. sphenoidalis при наличии sut. metopica в общем менее выражена, чем на контрольных черепах.

Таблица 1

Состояние лобных пазух при наличии *sut. metopica*

	Общее число черепов	Отсутствуют лобные пазухи		Односторонние лобные пазухи		Средние размеры двухстор. лобных пазух в мм	
		Число случаев	% и средн. квадрат. ошибка	Число случаев	%	Высота	Ширина
Метопические черепа . .	110	31	28 (± 4.2)	18	16.3 (± 3.5)	16.36 (± 0.81)	21.34 (± 0.99)
Контрольные	80	6	7.5 (± 2.9)	9	11.2 (± 3.5)	22.02 (± 0.97)	24.9 (± 0.97)

Пневматизация передней трети sin. sphenoidalis на метопических черепах наблюдалась нами в 21.8% (± 5.6%), на контрольных только в 2.4% (± 1.4%). Пневматизация sin. sphenoidalis на всем протяжении наблюдалась на метопических черепах в 23% (± 5.72), на контрольных в 26.2% (± 3.9%), (срв. табл. 2). Следовательно и в этом отделе основной кости при метопизме относительно часто (в 21.8%) обнаруживается сохранение ювенильных особенностей, тогда как на контрольных черепах эти ранние фазы пневматизации основной кости обнаруживаются несомненно реже.

Таблица 2

Турецкое седло при наличии sut. metopica

	Общее число черепов	Средние размеры турецкого седла		Инфантильный индекс		Пневматизация sin. sphenoidalis		Обызвествление protuberantia occipitalis externa
		Сагит.	Вертик.	Общее число случ.	%	В перед. 1/3	На всем протяжении	
Метопические черепа . .	55	11.11 (± 0.18)	9.64 (± 0.16)	23	41.8 (± 6.6)	21.8 (± 5.6)	23 (± 5.7)	38.1 (± 6.6)
Контрольные .	125	11.5 (± 0.12)	9.02 (± 0.1)	9	7.2 (± 2.3)	2.4 (± 1.4)	26.2 (± 3.9)	67.2 (± 4.2)

При наличии так называемой акромегалоидной конституции, а также при базедовизме sin. sphenoidalis пневматизируется преждевременно. Уже в юношеском возрасте у представителей этих конституциональных типов sin. sphenoidalis преждевременно пневматизирован на большом протяжении

(Д. Г. Рохлин). Очевидно, что обладатели метопических черепов редко представлены указанными конституциональными типами.

Для изучения конституциональных особенностей турецкого седла мы прибегали к рентгенографическому исследованию 55 метопических и 125 контрольных черепов. Мы измерили на рентгенограммах два размера турецкого седла — сагиттальный и вертикальный.

Помимо абсолютной величины размеров турецкого седла, представляет интерес отношение этих размеров, так называемый индекс турецкого седла. Индекс называется инфантильным, если вертикальный размер равняется или даже больше сагиттального. С возрастом уменьшается число людей с инфантильным индексом.

На нашем материале сагиттальный и вертикальный размеры (как на метопическом, так и на контрольном материале) представлены средними вариантами нормы (см. табл. 2). При наличии акромегалоидного акцента сагиттальный размер турецкого седла приближался бы к 15 мм, а вертикальный к 12 и даже к 13 мм. Следовательно, метопические черепа несомненно лишены акромегалоидного акцента.

Заслуживает особого внимания большой процент метопических черепов с инфантильным индексом: на метопических черепах в 41.8% (± 6.6%), на контрольном материале — в 7.2% (± 2.3%).

Итак, приводимые разными авторами предположения о том, что длительное сохранение sut. metopica является результатом влияния патологических факторов, отвергается на основании данных рентгенологического исследования.

Метопизм нужно рассматривать как нормальный вариант черепа. Соответствующий череп хотя в целом и достиг полного развития, однако в некоторых своих отделах обнаруживает торможение диференцирования.

При метопизме наряду с проявлением локальной задержки морфогенеза в области лобной кости одновременно наблюдаются и иные ювенильные и даже инфантильные признаки. В то же время метопические черепа характеризуются меньшим количеством сенильных признаков.

Метопические черепа отличаются от контрольного материала большим количеством инфантильных форм турецкого седла; степень пневматизации основной пазухи свидетельствует о том же.

Что касается конституциональных особенностей обладателей метопических черепов, то рентгенографические данные свидетельствуют об отсутствии акромегалоидного (гипофизарного) акцента. Это обстоятельство представляет известный общебиологический интерес. Акромегалоидный

акцент, как показывают наши рентгенографические исследования черепов шимпанзе и горилл, характерен для приматов, а, судя по общеизвестным репродукциям, фотографиям и слепкам, акромегалоидный акцент характерен для питекантропа, неандертальца и иных звеньев эволюционного ряда человека.

Небольшие размеры турецкого седла, умеренная пневматизация sin. sphenoidalis, редукции лобных пазух, слабое развитие protuberantia occipit. ext., все эти признаки несомненно исключают возможность акромегалоидной конституции у обладателей метопических черепов.

Отсутствие акромегалоидного акцента на метопических черепах представляет материал для суждения о значении метопизма в эволюционном процессе. Метопизм, как и иные ранее перечисленные инфантильные и ювенильные особенности основания черепа и черепного свода, скорее всего нужно рассматривать не как атавистические, а как новые признаки.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

К ВОПРОСУ О ДИНАМИКЕ СТАДА У ПОЗВОНОЧНЫХ

С. А. СЕВЕРЦОВА

(*Представлено академиком* **А. А. Борисяком**)

I. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ПЛОДОВИТОСТЬ И СМЕРТНОСТЬ ЖИВОТНЫХ

Настоящая статья является кратким изложением более полной работы по биологии размножения высших позвоночных, которая в настоящее время подготовляется к печати и посвящена сравнительному исследованию роста популяций разных видов этой группы животных. В ней мы касаемся только некоторых из изученных нами видов. Статистика дичи в охотничьих хозяйствах в настоящее время является единственным источником сведений о динамике стада зверей и птиц.

При анализе статистических данных необходимо иметь достаточно ясное представление о биологии изучаемых форм, но в интересах краткости изложения в настоящей статье главное внимание сосредоточено на анализе кривых прироста стада, и частная биология животных и число примеров, иллюстрирующих характер очень важного для нас явления периодической массовой гибели позвоночных, сведены к минимуму.

Анализ статистических данных требовал применения метода исследования, который одновременно давал бы возможность оценить доброкачественность цифрового материала и позволил бы выяснить относительное значение выработавшихся в течение эволюции факторов, определяющих скорость прироста стада у разных видов.

Я вычислял теоретически ход прироста стада при тех, может быть, недостаточно точных сведениях о плодовитости животных, которые имеются в литературе и сопоставлял такой теоретический расчет с действительной динамикой стада.

Исходя из положения, что логарифмы чисел, составляющих геометрическую прогрессию, образуют прогрессию арифметическую, я логарифмировал ряды цифр годовых учетов. Нанося эти логарифмы на систему координат, я, по расположению точек относительно прямой, судил, насколько точно действительное размножение следовало теории. Методом логарифмирования удалось показать, что прирост стада позвоночных в природе действительно идет по экспоненциальной кривой, определяемой видовыми константами размножения (см. ниже), с поправкой на определенный коэффициент смертности взрослых и приплода.

Пытаясь определить кривую роста стада, мы шли по пути, намеченному ихтиологами, детально изучающими возрастные группы рыб, тогда как большинство исследователей роста человеческого населения или таких беспозвоночных, легко размножающихся в лабораторных условиях, как *Drosophila melanogaster* и некоторые другие формы, служившие объектами исследования — довольствовались изучением суммарного прироста. Авторами во многих случаях было найдено, что ход прироста популяции может быть хорошо описан при помощи так называемой логистической функции Ferlust-Pearl: $y = \frac{K}{1 + C^{a + bx}}$ (Pearl, 1920).

Логистическая кривая имеет S-образную форму, которая показывает, что в начале периода размножения прирост идет медленно, затем ускоряется и, наконец, когда перейдена известная критическая точка плотности населения, скорость прироста постепенно затухает.

Перль в 1920—1923 гг. показал, что логистическая кривая хорошо описывает прирост человеческого населения и опытных культур дрозофилы.

В коэффициентах уравнения Перля нельзя видеть величин, имеющих биологический смысл. В то же время ясно, что биологические явления, лежащие в основе описываемых одной и той же кривой процессов размножения различных форм, не имеют между собой ничего общего.

Чапман (Chapman, 1930) культивировал *Tribolium confusum* в определенном объеме муки. Эта мука периодически менялась так, что количество пищи оставалось достаточным для популяции, но по мере увеличения численности червей прирост колонии замедлялся, потому что черви вместе с крупинками муки пожирали и отложенные ими яйца.

Дрозофила размножалась в баночках ограниченного объема, где с увеличением численности темп размножения также замедлялся, но, очевидно, по иным причинам, чем это происходит у *Tribolium*. Совершенно ясно, что

оба эти случая биологически не имеют ничего общего с приростом населения человека. Сложные социальные отношения, в условиях классовой борьбы, в связи с коэффициентами рождаемости и смертности в разных классах, эмиграцией и иммиграцией населения, относительным развитием производительных сил в разных странах, не позволяет переносить непосредственно на человека закономерности, найденные у животных. Поэтому мы должны были признать, что логистическая функция, если и дает возможность с внешней стороны описывать рост популяции, то не подвигает нас в понимании биологического смысла явления.

В 1930 г. появилось большое исследование Фишера (R. A. Fischer, 1930). Р. Фишер предложил показатель прироста населения, названный им «мальтузианским параметром»; он рассматривает плодовитость и смертность возрастных групп человеческаго населения в некоторых странах и дает уравнение, позволяющее вычислить при данных коэффициентах рождаемости — смертности не только современное состояние прироста, но и предвидеть его ход в будущем. К сожалению, для животных метод Фишера не применим, потому что в своих построениях он исходит из так называемых таблиц смертности, которыми пользуются общества страхования жизни и таблиц рождаемости, составленных аналогичным образом. Такая статистика есть для человека, но ее нет ни для одного вида диких животных.

В том же 1930 году опубликована работа Холодовского (Cholodowskij, 1930), который впрочем занимается только математической стороной вопроса и дает уравнения для вычисления численности животных, если известно число пар родоначальников и возраст половой зрелости, период между двумя последовательными плодоношениями самки и т. д., т. е. теми наследственными свойствами, которые мы называем видовыми константами размножения, но не касается смертности животных, замедляющей потенциальный прирост популяции.

Среди демографов, изучающих рост человеческого населения, повидимому широкое распространение получил так называемый «витальный индекс» Перля (Pearl, 1926), который характеризует прирост населения данной страны отношением числа рождений «B» к числу смертей «D» за тот же период и множит эту величину на 100. Если эта величина окажется больше 100, то население возрастает, в противном случае уменьшается.

Различия между плодовитостью человека в разных странах и плодовитостью разных видов позвоночных настолько велики, что пользоваться методами, разработанными для человека для сравнения плодовитости разных

видов между собою, невозможно. Для этой цели мне пришлось выработать специальный показатель видовой плодовитости.

Разбирая вопрос о том, какие моменты определяют скорость роста популяций разных видов, по какой кривой идет прирост популяции и какие факторы задерживают или прерывают ее рост, в статье 1930 г. (op. cit.) я предложил показатель видовой плодовитости «q», который позволяет в порядке первого приближения охарактеризовать относительную плодовитость разных видов, поскольку эта плодовитость зависить от наследственных свойств особи.

В природе мы всегда имеем дело с размножением некоторого множества особей, составляющих «стадо», размножение которого длится всегда несколько лет. У большинства позвоночных родители продолжают жить и плодиться, когда детеныши их достигают половой зрелости и приносят приплод в свою очередь, так что стадо состоит из нескольких возрастных групп. Ежегодно погибает часть особей каждой группы, и убыль более старых групп, обычно с некоторым избытком, пополняется особями следующей возрастной группы. Таким образом, кривая возрастного состава и кривая прироста стада определяются коэффициентами рождаемости и смертности составляющих его возрастных групп.

Первоначально мы будем рассматривать скорость размножения позвоночных, как будто народившиеся особи не погибают, и попытаемся сравнить эту «потенциальную плодовитость» у разных видов.

Каждое стадо размножается соответственно ходу индивидуального развития и плодовитости составляющих его особей, и мы должны проследить, каким образом свойства единичной особи проявляются в плодовитости стада.

Потенциальная скорость прироста стада зависит от наследственных особенностей особей каждого вида, которые мы можем назвать видовыми константами размножения; эти константы характеризуют вид не менее определенно, чем его морфологические признаки. Такими константами будут определенные методами вариационной статистики: число детенышей на 1 пару в год — r; возраст первого плодоношения, слагающийся из возраста половой зрелости (плюс у млекопитающих) длительность беременности — j; период между двумя последовательными плодоношениями одной и той же самки — p. Относительная численность половозрелых самцов и самок стада и процент яловости самок имеют, повидимому, второстепенное значение, и едва ли отклонения от равенства числа ♂ и ♀ у позвоночных определяются наследственно. Для каждого вида, для которого известны

эти величины, мы можем построить кривую прироста стада. Несколько таких кривых, вычисленных по формулам Холодовского (Cholodowskij, op. cit.) представлены на фиг. 1; просматривая их, мы видим, что скорость прироста стада в первую очередь определяется числом детенышей, приносимых самкой в год — r. Прирост стада идет тем быстрее, чем больше величина r (кривые $j_3\ r_5$; $j_3\ r_4$; $j_3\ r_3$); при постоянном r вид размножается тем медленнее, чем больше величина j (если j > года)[1]. Замедление прироста делается еще сильнее, если самки плодятся не ежегодно, а через большие сроки, например, через два или три года. Замедление прироста стада при «p», большем 1, пропорционально $r^{\frac{1}{p}}$.

При рассмотрении кривых фиг. 1 обращает на себя внимание то, что разница в ходе кривой $r_1\ j$ и $r_1\ j_2$ значительно больше, чем между кривой $r_1\ j_2$ и $r_1\ j_3$ и что эта разница зависит исключительно от величины j на этом интервале. Сопоставление кривых потенциальной плодовитости стада приводит нас к выводу, что виды позвоночных можно расположить по их плодовитости в весьма последовательный ряд. При этом имеет значение не только число детенышей, но и другие видовые константы размножения. Скорость прироста стада двух видов, при разном числе детенышей, приносимых самкой в год, может быть одинаковой, если коэффициенты или константы размножения j и p будут имет соответственные значения. Теперь мы можем выразить показатель видовой плодовитости q уравнением $q = \left(1 + \frac{r}{(F)j}\right)^{\frac{1}{p}}$, где $(F)j < j$; подставляя в это выражение числовые значения констант каждого вида, мы можем одним числом охарактеризовать его плодовитость относительно другого вида.

Мы должны здесь же отметить, что с точки зрения биологии размножения стада константы j и p являются не временными категориями, как кажется с первого взгляда, но наряду с процентом яловости самок и относительной численностью полов — коэффициентами, определяющими численность ежегодно плодящихся особей стада. Не приносящие в данном году приплода особи, потому ли что они не достигли половой зрелости или потому, что они плодились в предшествовавшем году, существуют в стаде; наряду с другими используют кормовые ресурсы своего Wohnraum (Habitat немецких и английских авторов), не принимая участия в продукции стада. Годовая продукция стада, очевидно, зависит только от числа плодящихся

[1] Точное значение Fj нами не выяснено; рассмотрение кривых показывает что $Fj < j$; но мы все же можем пользоваться j, так как изменения Fj, очевидно, соответствуют изменениям j.

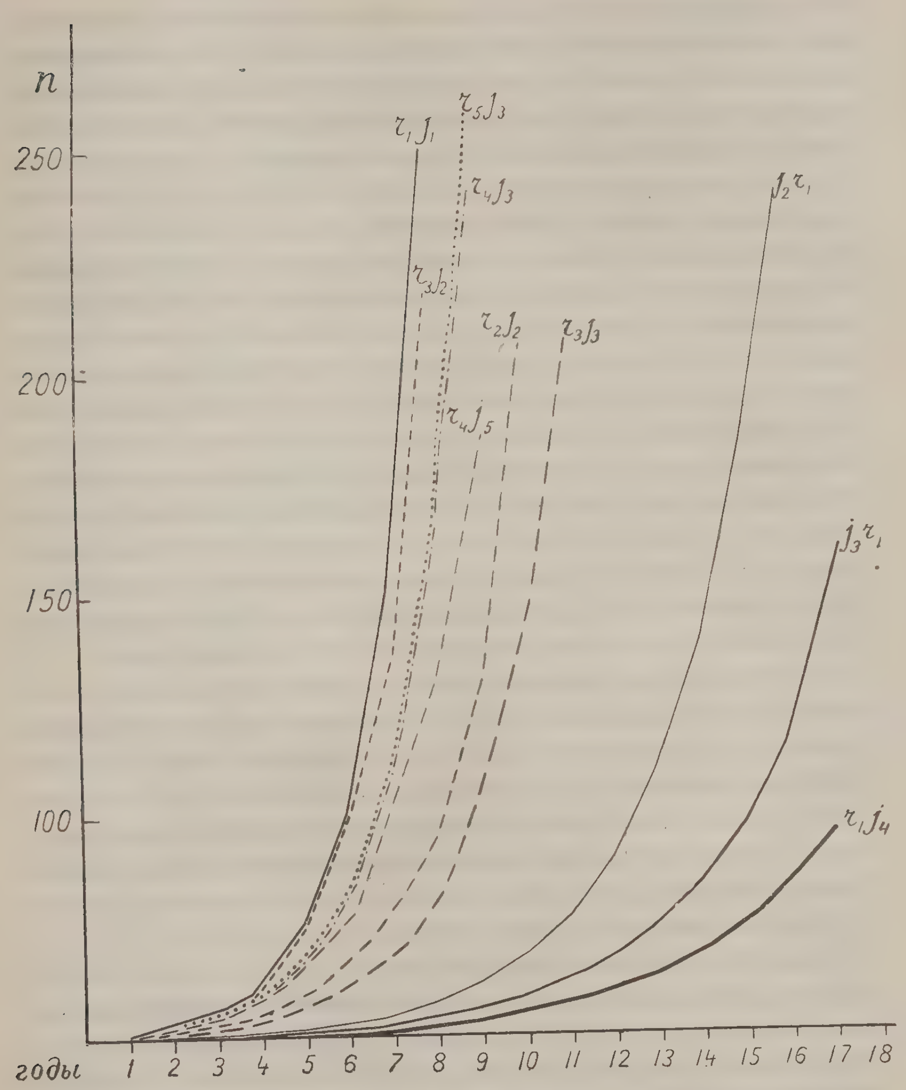
самок, и это число может быть меньше и больше в зависимости от величин j и p.

В работе 1930 г. я показал, что видовая продолжительность жизни особи T обратно пропорциональна логарифму показателя видовой плодовитости q. По мере возрастания продолжительности жизни плодовитость вида уменьшается не только за счет уменьшения числа приносимых самкой детенышей, но и путем повышения j и p, т. е. путем сокращения числа плодящихся самок стада.

Мы не можем ограничиваться сравнением потенциальной плодовитости разных видов, так как в природе прирост стада любого вида замедляется смертностью особей в борьбе за существование. Вслед за А. Н. Северцовым (A. N. Sewertzoff, 1917) будем различать смертность молодых неполовозрелых особей от смертности взрослых. Возраст половой зрелости является рубежом, переходя который молодые животные обычно достигают полного развития всех особенностей, свойственных виду. Размножение животных подчинено годовому циклу и падает обычно на весенне-летний период года. В зависимости от длительности беременности и развития яиц одни виды приносят приплод в лето года достижения половой зрелости, другие, обладающие длительной беременностью, достигают половой зрелости осенью, а рождают детенышей на следующий год; таковы олени, лошади и другие виды, у которых беременность продолжается 9—11 и больше месяцев. Поэтому, рассматривая ход прироста стада, нам удобнее пользоваться не возрастом половой зрелости, но возрастом первого плодоношения самки, слагающимся из выраженного в годах возраста половой зрелости и длительности беременности. Это тем более удобно, что для хода геометрической прогрессии размножения важен именно момент рождения особи. Поэтому мы будем отличать смертность молодежи за период j от смертности взрослых и обозначать его буквой «m».

В составе любого вида мы можем отличать три возрастных группы особей: 1) неполовозрелых, родившихся в данном году или раньше; 2) особей взрослых производителей, составляющих основную группу вида и 3) группу старых особей, переживших период деятельности половых желез и неспособных к размножению.

Если мы будем рассматривать только прирост группы взрослых производителей, которая возрастает за счет молодежи, пережившей период ранней смертности, введение в уравнение коэффициента смертности будет эквивалентно соответственному уменьшению числа рождаемых детенышей. Поэтому кривые на фиг. 1 можно рассматривать как кривые прироста взрослых



Фиг. 1. Теоретический прирост стада при различных видовых константах. Кривые показывают влияние разных величин j и r на скорость прироста (j — возраст одного плодоношения; r — число детенышей; нет смертности производителей и приплода).

особей, у которых доживает до возраста первого плодоношения число детенышей $r_1 = r - m$, где $m < r$.

Если детская смертность в отдельные годы мало колеблется, то она, очевидно, не может изменить характера кривой потенциального прироста

стада и превратить экспоненциальную кривую в логистическую. Это превращение может иметь место только в случае, если смертность неполовозрелых или смертность взрослых прогрессивно усиливается по мере роста популяции, или, если соответственно будет понижаться рождаемость. Имеют ли место указанные явления у позвоночных, находящихся в естественной обстановке, должны показать исследования.

Числовых величин, характеризующих смертность взрослых особей, мы почти не имеем, но знаем, что она подвержена большим колебаниям и в отдельные годы принимает характер повального падежа. Ряд наблюдений заставляет притти к выводу, что периодические повальные падежи являются не случайностью, но закономерно повторяющимся явлением, зависящим от периодических изменений внешней среды животного. Отдельные виды реагируют на одни и те же изменения среды различно в зависимости от выработавшихся в течение их эволюции особенностей конституции и биологии. Статистика пушной торговли и прямые наблюдения над численностью разных видов в природе показывают, что численность зверей в иные годы резко падает, а затем постепенно поднимается до прежнего уровня (Туркин, 1900 г.; Эльтон, 1927 г.). Эти падения зависят не от человека, изменяющего условия существования животных, а от естественных причин.

Причину падежей надо видеть прежде всего в резких отклонениях элементов климата от оптимума, которые действуют иногда прямо, иногда косвенно. Элементы климата колеблются около некоторой средней, и крайние отклонения бывают реже, чем более слабые. Необычайно глубокие снега зимой, покрывающие подножный корм, вызывают голодовку и гибель травоядных. Мятели с бурей, гололедицы, наводнения, засухи, степные и лесные пожары, неурожаи кормовых растений прямо или косвенно усиливают смертность и вызывают повальные падежи.

Для животных часто имеют значение не абсолютные уклонения от оптимума одного из элементов климата, но известные комбинации этих элементов, которые с трудом улавливаются метеорологическими станциями обычного типа. Так, массовая гибель может быть вызвана сравнительно небольшим понижением температуры после оттепели и дождя зимой, когда почва покрывается твердой ледяной коркой, под которой животные не могут достать корм. Массовая гибель травоядных, естественно лишает пищи плотоядные виды, которые начинают гибнуть от голода. Отдельные виды различно реагируют на изменения климатических и иных факторов внешней среды и депрессии, от которых гибнут менее стойкие, но будут сравнительно безболезненно переноситься более стойкими видами животных.

Другой основной категорией причин массовой гибели животных являются заразные болезни. В девятисотых годах чумная эпизоотия вызвала гибель 90 % копытных в Африке. Известны сибиреязвенные эпизоотии северных оленей, кокцидиоз и глистные заражения грызунов и копытных и т. д. Поскольку вызывающие повальный падеж заразные болезни вызываются для каждого вида специфическими бактериями, протозоа или паразитическими червями, мы должны признать, что возбудитель болезни всегда присутствует в популяции хозяев, и при известных условиях, повышающих возможность заражения здоровых особей или понижающих стойкость хозяина относительно паразита, болезнь развивается и может принять повальный характер.

Прямые наблюдения показывают, что дождливое лето, когда много луж, в которых живет малый прудовик *Limneus stagnalis*, являющийся промежуточным хозяином печеночного двурота *Distomum hepaticum*, способствует заражению личинками этого паразита зайцев, оленей, овец и некоторых других травоядных.

Если те же климатические условия вызвали понижение упитанности дичи и тем понизили ее стойкость и способность противостоять паразиту, то усиленное заражение вызывает повальный падеж. Если численность вида в течение благоприятного времени летней половины года, когда достаточно корма и на данной площади может прожить больше особей, или в течение нескольких благоприятных лет, достигла известной величины, то при наступившем ухудшении условий численность оказывается такова, что условия существования отдельной особи ухудшаются. Они не могут стойко бороться с болезнью, а самая плотность населения способствует заражению.

Для большинства грызунов удается установить правильную периодичность повальных падежей от заразных болезней, которым предшествует массовое размножение животных. Та же периодичность устанавливается Эльтоном для хищников, которые питаются этими видами. Для копытных и менее плодовитых грызунов (*Castor fiber*), по крайней мере по статистике пушной торговли, такой периодичности установить не удалось. Тем не менее то, что мы сказали выше о повторяющихся резких отклонениях от средней величины элементов климата и о повальных болезнях, заставляет нас признать, что каждый вид должен время от времени переживать повальные падежи, но что частота этих падежей для разных видов, соответственно различиям в их конституции и биологии, должна быть различна.

Мы должны выяснить еще один, имеющий очень большое значение момент. Плате (Plate, 1913) справедливо указывает, что гибель животных

от стихийных причин не связана с плотностью населения, и редкое население может также погибнуть от наводнения, гололедицы или засухи, как и густое. Поэтому, настаивая на том, что разные виды с различной стойкостью относятся к одним и тем же изменениям среды, мы думаем, что в пределах одного вида крайние отклонения от оптимума настолько превышают выносливость особей, что их индивидуальные различия теряют свое значение, и выживание подчинено закону больших чисел. Поэтому чем больше особей заселяло местность перед моментом массовой гибели от стихийных причин, тем большее количество особей переживет падеж, и тем надежнее восстановится численность вида, необходимая для того, чтобы пережить следующую очередную депрессию. Если же вид не будет успевать восстанавливать свою численность, то следующую депрессию переживет еще меньшее количество особей, и вид начнет вымирать.

Мы выдвинули на первое место абиотические стихийные причины массовой гибели, потому что условие переживания вызванных ими депрессий требует максимальной численности популяции. Повальным болезням, также уничтожающим популяции по закону больших чисел, плотность населения благоприятствует, хотя и не является их исключительной причиной.

Мы полагаем, что плодовитость вида должна соответствовать статистической повторяемости опасных для вида отклонений стихийных факторов, но в случае, если очередная депрессия запоздает, то среди населения, достигшего максимальной численности, появляются условия, благоприятные для развития повальных болезней. Это обстоятельство должно делать периодичность повальных падежей более правильной.

Прямые наблюдения над периодичностью массовых падежей показывают, что одни виды подвергаются им чаще, другие — реже.

Из того, что мы сказали о потенциальной плодовитости животных следует, что одни виды настолько менее плодовиты, чем другие, что если бы частота падежей, вызываемых эпизоотиями или крайними отклонениями от оптимума элементов климата была одинакова и для плодовитых и для неплодовитых видов, то малоплодовитые виды не успевали бы размножиться и полностью восстановить свою нарушенную падежом численность за благополучный период, а в силу этого в сравнительно короткий срок должны были бы исчезнуть с лица земли.

Отсюда следует, что искать простой периодичности в массовых размножениях и падежах различных видов, связывая эту периодичность с периодом климатических колебаний 11-летнего цикла солнечных пятен,

как это делает Эльтон (Elton, 1926), совершенно невозможно. Отмеченное для многих видов периодическое размножение и отмирание популяций у каждого вида должно быть свое, должно соответствовать его потенциальной плодовитости и коэффициенту смертности в периоды между двумя падежами. Познакомиться с тем, как идет прирост стада в периоды между двумя повальными падежами мы можем, только изучая фактический прирост животных в природе. Считая необходимым организацию специальных исследований преимущественно в заповедниках, мы тем не менее нашли возможным использовать уже накопленный материал, хотя он собирался для других целей и часто не обладает достаточной полнотой и точностью, чтобы попытаться на нем подойти к познанию «динамики стада» позвоночных животных.

II. ДИНАМИКА СТАДА ПТИЦ И МЛЕКОПИТАЮЩИХ

От бывшей царской охоты в Гатчине близ Ленинграда сохранились статистические сведения о численности 5 видов пернатой дичи семейства *Tetraonidae,* дикой козы *Capreolus capreolus* и сведения о результатах охот и борьбы с хищниками. Эти данные охватывают 25-летний период. с 1886 по 1909 гг.

Статистические сведения были доложены заведующим охотой Дицем 2-му Всероссийскому съезду охотников в 1909 г. и опубликованы в трудах съезда. К сожалению, к цифровому материалу не было приложено объяснительного текста. Этот недостаток приходится пополнять отрывочными указаниями Дица из его выступлений на съезде и некоторыми литературными данными.

Общая площадь охоты захватывала несколько лесничеств и достигала более 200 000 га. Охотничьи угодья тщательно охранялись от браконьеров, что практически исключает незарегистрированный отстрел. Процент отстреливаемой дичи был крайне невелик. В то же время кривые отстрела хищников показывают непрерывный рост их числа, соответственно увеличению количества дичи, следовательно естественные соотношения хищников и добычи и убыль дичи в борьбе за существование не были существенно нарушены на территории охоты.

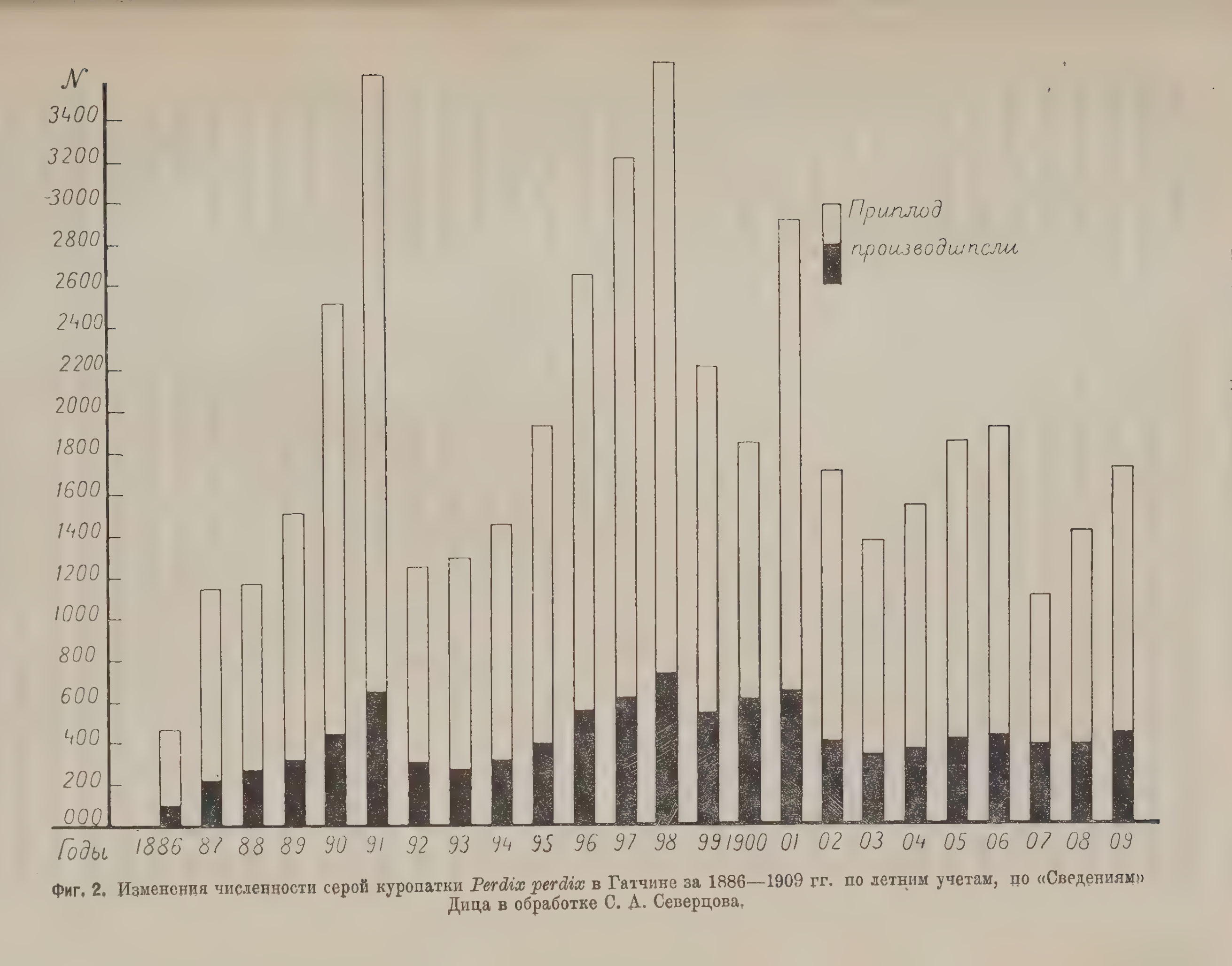
Пользование «Статистическими сведениями о численности дичи в Гатчине» было затруднено тем, что в «Сведениях» были помещены следующие материалы: численность каждого вида пернатой дичи на лето, средняя величина выводка на каждый год по всем видам вместе и общее число выводков. Это обстоятельство заставило меня по общему числу выводков

и средней величине выводка на лето, внося поправку на относительную плодовитость каждого вида, вычислить число выводков каждого вида отдельно. Просуммировав для проверки полученные числа выводков каждого вида, я сравнил их с числом, которое было дано Дицем и нашел, что полученная мною сумма отличается от данного числа на 1—2%. При той точности, которая возможна при учете дичи эта разница должна считаться незначительной. Зная для каждого вида число производителей и величину приплода на июнь — июль месяцы каждого года двадцатипятилетия, я вычислил годовой процент прироста производителей, процент выживания и убыли приплода за зиму и, наконец, витальный индекс Перля, причем за отсутствием сведений о величине кладки за эти годы за число рождений принято число молодежи летом за вычетом отстреленных на охоте. Мною был обработан глухарь (*Tetrao urogallus*), тетерев (*Lyrurus tetrix*), рябчик (*Tetrastes bonasia*), белая куропатка (*Lagopus* sp.), серая куропатка (*Perdix perdix*) и фазан (*Phasianus colchicus*). Все эти птицы не перелетные и мало кочующие. Это дает уверенность, что мы действительно определяли коэффициент смертности, а не последствия разлета дичи с территории хозяйства; прослеживая изменения численности этих птиц на протяжении двадцатипятилетия, можно было подметить ряд своеобразий в размножении каждого вида, но мы опишем здесь только ход прироста стада серой куропатки и отчасти глухаря.

Серая куропатка *Perdix perdix* в Гатчине. Куропатка эта была была самой многочисленной птицей. Она очень плодовита, так как в кладке бывает от 15 до 24 яиц. Молодые куропатки гнездятся на следующую весну и за птенцами ухаживают оба родителя.

Нарастание стада. Движение стада удобно обозреть при помощи графика на фиг. 2. На этом графике численность птицы на лето каждого года изображена колонкой, в которой черная часть отвечает числу производителей, а остальные части колонки соответствуют численности молодых в выводке во время учета, приблизительно в июне — июле месяцах.

Отстрел серой куропатки в Гатчине был незначителен, достигая в среднем всего 6% в год и не мог существенно изменять численность птицы. Мы видим, что численность куропаток подвергалась весьма большим колебаниям. Молодежь, учтенная летом, на лето следующего года переходила в группу производителей, следовательно, прирост числа производителей определяется количеством куропаток, переживших зиму. Процент выживания молодежи, определенный нами как отношение числа



Фиг. 2. Изменения численности серой куропатки *Perdix perdix* в Гатчине за 1886—1909 гг. по летним учетам, по «Сведениям» Дица в обработке С. А. Северцова.

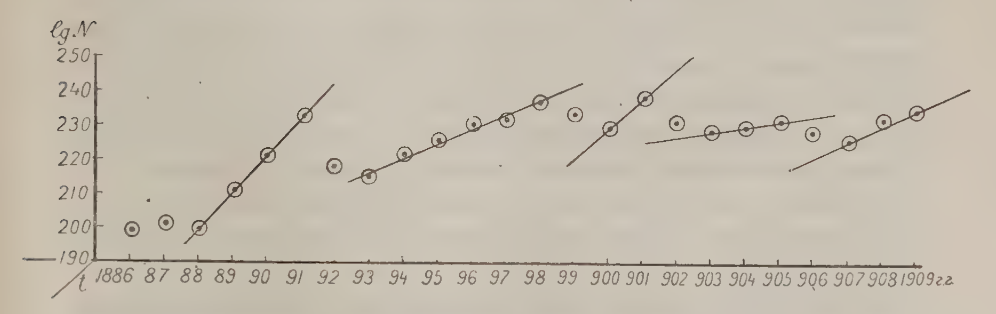
молодежи предшествующего к приросту взрослых последующего года, когда пережившие зиму птицы в свою очередь приступали к размножению, оказывается весьма постоянным. Из году в год, в среднем, выживало 5—6% от общего числа молодежи на лето, за вычетом отстреленных на охоте, что обеспечивало в благополучные года прирост производителей на 24.4% от числа предшествующего года. По всей вероятности, убыль приплода за зиму была несколько меньше, так как очевидно погибала и некоторая доля старых особей. Величина этой убыли осталась нам неизвестной, но в какой-то мере она повышала процент убыли приплода. Убыль всего стада за зиму определяется в среднем в 70%. Убыль «приплода» за зиму была порядка 90% и определена нами за года, когда наблюдался прирост производителей. Обозрение графика показывает, что было несколько лет, когда общая численность стада не только молодых, но и старых особей понижалась весьма значительно. Мы видим совершенно правильное нарастание численности производителей в течение 6 лет, затем резкое падение в течение 2 лет, причем убыли второго года несколько меньше, чем в первый год.

За этим следует второй, шестилетний период закономерного возрастания численности и новое падение, за которым следуют сравнительно незначительные подъемы в течение 3—4 лет, сменяющиеся падениями меньшего масштаба, чем два первые. Мы имеем несомненную периодическую массовую убыль птицы, о причинах которой именно в Гатчинской охоте сведений не сохранилось. Однако, знакомство с биологией серой куропатки указывает, что они гибнут массами в суровые зимы и, кроме того, страдают от повальных болезней и глистных инвазий. Отстрел и хищническое истребление дичи в условиях Гатчинской охоты исключается, следовательно, мы можем предполагать только естественные причины гибели. Наше внимание останавливает то, что убыль стада, за исключением может быть 1900 г. продолжается 2—3 года подряд (фиг. 2). Надо думать что стихийные причины могли вызвать гибель в течение одной зимы; если же она зависела от болезни и заражения паразитами, то эта причина могла действовать дальше одного годового срока, пока население не разредится настолько, чтобы паразит не мог слишком легко переходить на здоровых особей. Внимательное сопоставление колебаний численности дичи с метеорологическими записями Главной геофизической обсерватории результатов не дало.

Относительно реальности падежа 1900 г. у меня имеются некоторые сомнения, так как после убыли этого года замечается очень большой

процент прироста производителей. Повидимому, старики без выводков в Гатчине не регистрировались. Между тем бывает, что весенние заморозки массами губят молодняк, а старые птицы выдерживают эти заморозки благополучно. Отсюда следует вывод, что убыль производителей этого года была кажущейся, и колонка взрослых 1900 г. повышена против числа, показаннаго в цифровой таблице 2 (в конце статьи).

Величина витального индекса куропатки очень характерна для этой плодовитой птицы; в среднем за 23 года она оказалась $\frac{B}{D}.100=107$, а если откинуть первый и последний годы, то всего $\frac{B}{D}100=101.2$. Эта



Фиг. 3. Логарифмированная кривая численности серой куропатки в Гатчине за 1886—1909 гг. Масштаб: 1 год = 5 мм.

величина соответствует почти полному отсутствию прироста, хотя в промежуточные годы численность птицы поднималась очень сильно (с 1100 до 3600 особей).

Интересно также совпадение 5—6-летнего периода нарастания численности куропатки с известной нам по Митчеллю (P. C. R. Mitchell, 1911) семилетней продолжительностью жизни этой птицы.

Насколько правильно шло размножение куропаток, видно из правильности расположения точек логарифмов ежегодного числа производителей. На графике фиг. 3 по абсциссе отложены года, по ординате логарифмы чисел годовых учетов в масштабе 0.01=1 мм.

Правильность расположения точек указывает, что прирост популяции шел по экспоненциальной кривой, определяемой видовыми константами куропатки с поправкой на смертность первого года жизни, которая для куропатки совпадает с возрастом первого плодоношения самки и достигает 90—95% приплода. Просматривая расположение логарифмических точек графика 3, мы замечаем, что не только точки восходящего, но и точки нисходящего ряда более или менее правильно располагаются на

прямой. Это расположение точек указывает, что убыль птицы также закономерно шла по отрицательной экспоненциальной кривой. Какова же причина этой убыли? Если бы повышенная смертность вызывалась климатическими факторами, например слишком суровой и снежной зимой, то мы могли бы ждать резкой убыли птицы в течение одного года, и по миновании этой причины у нас на следующую весну численность куропаток должна была бы опять возрастать. Между тем, расположение точек указывает на длительную причину гибели. В своей крайне интересной работе В. Вольтерра (V. Volterra, 1928, перев. акад. П. П. Лазарёва) указывает, что убыль растительноядного вида от встреч с хищником идет по нисходящей экспоненциальной кривой. К числу видов «хищников» он относит и возбудителей болезней. Проще всего объяснить периодическую убыль куропаток какой-нибудь глистной инвазией. Частота встречи хищников и добычи, при которой происходило заражение здоровых особей, очевидно, является функцией численности куропаток, и потому заражаемость, а вместе с ней и смертность должна понижаться с уменьшением численности стада, что мы и наблюдаем в действительности. Гибель первых годов от падежа в среднем достигала 40%, а второго года всего 14% числа производителей. Показатели выживания и смертности приплода для других видов птиц оказались чрезвычайно близкими к определенным нами для куропатки; и у других птиц, за исключением глухаря, наблюдались периодические падежи. Глухарь же за все двадцатипятилетие не дал ни одного значительного падения численности, но прирост его стада оказался значительно более медленным, чем у куропатки. Не вдаваясь в анализ прироста глухаря, мы ограничимся указанием, что глухарь является значительно более долговечной птицей: по Брэму он жил в неволе до 20 лет. Возраст половой зрелости оказался значительно больше, чем у куропатки, так как глухарь гнездится и надевает окончательный взрослый наряд по третьему году, и величина кладки у него меньше, чем у куропатки, достигая всего 7—9 яиц в среднем. Соответственно меньшему значению r и большему j глухарь медленнее размножается и медленнее заселяет район обитания, что соответствует его большей продолжительности жизни. Куропатка размножается быстрее, потому что стойкость особей меньше, падежи и частая массовая гибель компенсируются плодовитостью птицы. В то же время коэффициенты смертности молодежи у обеих птиц практически одинаковы (90—95% годового приплода).

Козуля *Capreolus* sp. Кроме птиц в гатчинской охоте разводилась названная дикая коза: *Capreolus capreolus*.

Результаты этого разведения представляют огромный интерес, так как представляют исключительно редкий случай размножения крупного млекопитающего в течение 12 лет (с 1895 по 1909 гг.) без отстрела и при постоянном наблюдении за приростом стада, которое было предоставлено естественным условиям борьбы за существование и в 12 лет размножилось с 59 до 1068 голов.

Дикие козы, которых до этого времени в Гатчине не было, были выписаны из Германии в количестве 18 самцов и 19 самок, 3 козла и 6 козуль были доставлены с Урала и 2 самки и 1 козел с Кавказа, затем уже в 1907 г. 3 козы и 3 козла были привезены из Ачинска.

Первое время коз держали в огороженном зверинце. Затем в 1892 г. в количестве 41 штуки выпустили в лес; так как за 1893—1895 гг. сведений нет, то первым годом естественного размножения приходится считать 1896 г., когда их насчитывалось в лесах 59 голов.

Козули, как во всех охотничьих хозяйствах, учитывались по следам на снегу обычно в ноябре — декабре, когда козлятам, родившимся в апреле — мае было 7—8 месяцев, и период ранней смертности для них миновал. В назначенный день выходила вся стража для учета зверя, и каждый лесник, обходя свой участок, подсчитывал входные и выходные следы; по этим данным определялась общая численность зверя в хозяйстве.

Для нас важно отметить следующие биологические особенности козули. Козуля родит детенышей в мае, спаривается в августе. Беременность продолжается таким образом 9 месяцев. У козули наблюдается крайне своеобразное развитие зародыша: яйцо быстро проходит первые стадии дробления, затем развитие задерживается на несколько месяцев. Зародыш начинает формироваться за $4^1/_2$ месяца до родов. Таким образом, имеется явная, вызванная какими-то неизвестцыми причинами задержка развития зародыша. Фактический срок развития эмбриона 4—5 месяцев близок к сроку беременности овец или коз, а общая длительность беременности близка к длительности беременности более крупного оленя, у которого такой приостановки развития плода не имеется.

Половой зрелости самка достигает в возрасте 15—16 месяцев; в двухлетнем возрасте она приносит в норме двух, редко трех или одного детеныша.

По немецким наблюдениям ежегодно в среднем 20% половозрелых самок остаются яловыми. Самец достигает полного развития рогов в трехлетнем возрасте, но половая зрелость наступает раньше — в двухлетнем возрасте, как и у самок. Однако, поскольку в пору спаривания самцы

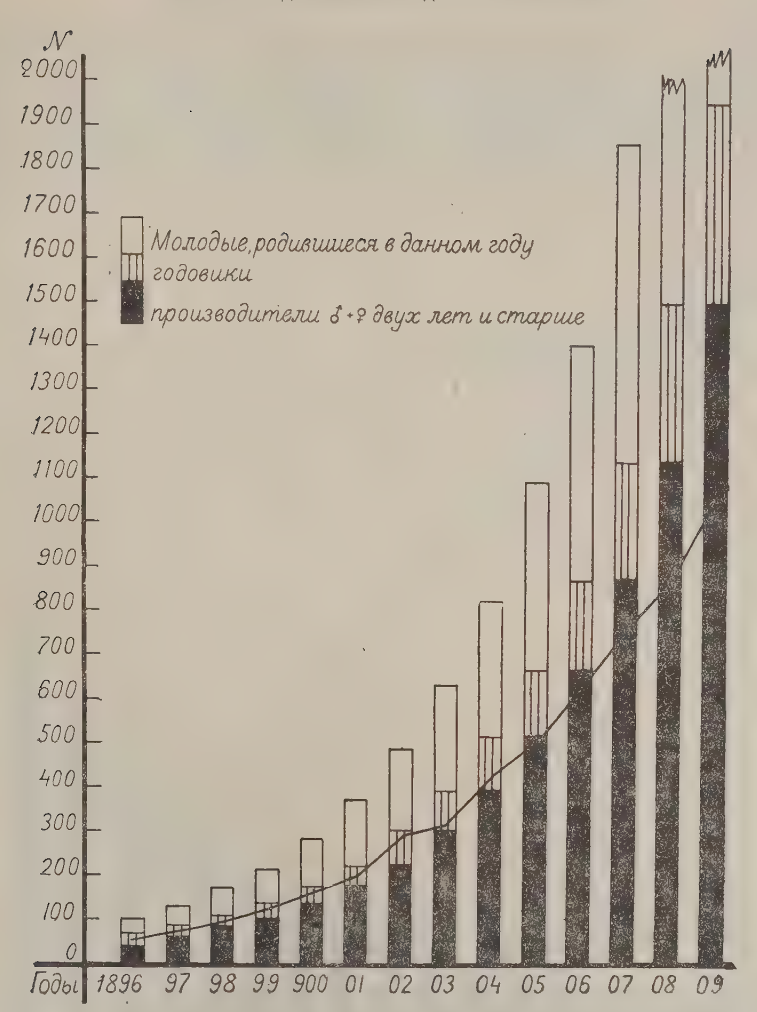
дерутся за самку, молодые могут участвовать в оплодотворении только в случае недостатка взрослых козлов. По немецким данным козуля перестает спариваться в 10-летнем возрасте, а живет до 14—15 лет.

В Гатчинских статистических сведениях возрастный состав стада не указан, но, очевидно, что в число козуль ежегодно входили взрослые козы 2 лет и старше, молодые старше года и, наконец, годовой приплод, за вычетом погибших до момента учета, причем анализ учета указывает, что последующая смертность приплода была невелика. Я вычислил теоретически ход прироста и возрастный состав стада козуль, начиная от 2 пар взрослых, при условиях; паритета числа самцов и самок, 20% яловости взрослых самок, которые приносили, начиния с 2-летнего возрасте по 2 козленка в год, причем 50% приплода погибало до достижения 2-летнего возраста. Пережившие гибель первого года не умирают в течение периода учета. Сделав соответствующий график (фиг. 4), я заметил, что нанесенная на него кривая прироста стада проходит в верхней части отдела колонок, обозначающих годовиков, но после повышенной гибели, на 8-м году, т. е. начиная с 1903 г., действительное размножение стада значительно отстает от теоретически вычисленного.

Сопоставив это явление с весьма малым приплодом козули в 1903 г., я предположил, что отставание зависело от повышенной смертности приплода этого года. Снизив точку годовиков до совмещения с точкой действительной численности стада Гатчинской охоты, я обнаружил дальнейшее совпадение теоретического прироста стада с эмпирической кривой. Это убедило меня в том, что учитывались действительно годовики, пережившие период ранней смертности и затем все остальные возрасты, что дало смелость вычислить весь ход прироста стада при вышеуказанных константах размножения. Принимая, что убыль приплода за 1 год жизни была такова, что общая цифра козуль была равна цифре, показанной в гатчинской статистике (фиг. 5), и построив такой расчет стада, я вычислил годовой процент убыли приплода, и оказалось, что в среднем погибало не более 54% в год (т. е. выживало 46% родившихся).

Поскольку смертность взрослых козуль несомненно имела место, но осталась нам неизвестной, 54% смертности приплода и 20% яловости покрывают с избытком и смертность взрослых. Мы лишены возможности определить коэффициент убыли, но должны думать, что коэффициент смертности приплода был порядка 50% родившихся каждый год козлят.

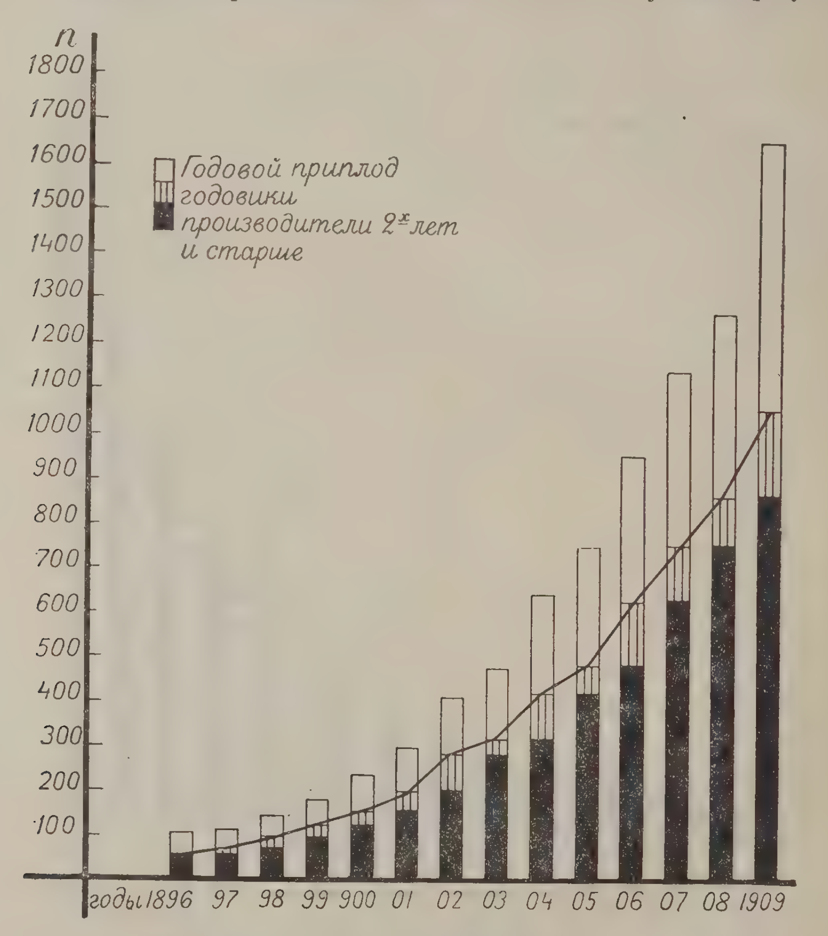
В моей работе 1930 г. я указал, что норма смертности детенышей за период от рождения самки до рождения ею первого приплода должна



Фиг. 4. Кривая роста стада козули *Capreolus capreolus* в Гатчине за 1896—1909 гг. Кривая прироста наложена на теоретический прирост стада, вычисленный при константах: r = 2; j = 2; n♂ = n♀; m = 50% родившихся; яловость = 20% половозрелых ♀; So = 59.

быть постоянной в пределах каждого класса позвоночных. Для млекопитающих мы имеем наблюдения американских исследователей над смертностью котика *Callorhinus alascanus*. У котиков на первом году жизни погибает 49—50% приплода. Наконец, мною лично зимой 1931—1932 г. был произведен подсчет кабана в Кавказском гос. заповеднике, и оказалось, что у него ранняя смертность уносит 45.5% приплода, если принять по Диннику (Динник, 1910) что самка приносит в среднем 8 поросят,

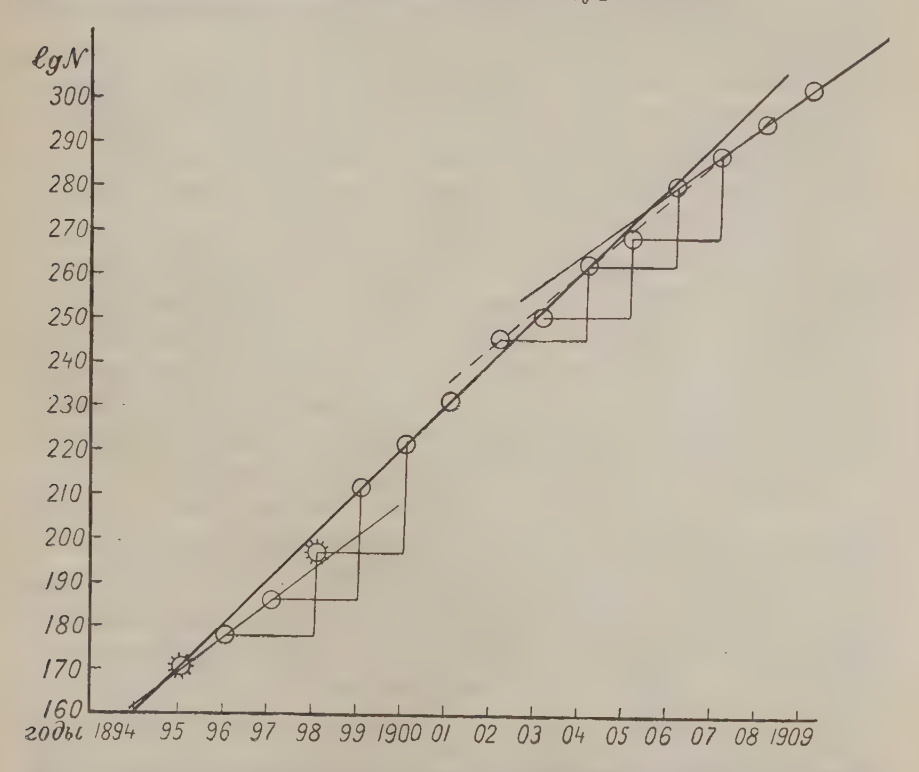
фактически вероятно несколько меньше. Если в среднем появляется на свет 7 поросят, то процент выживания поднимается до 50%. Таким образом, определенный нами процент смертности козули весьма точно совпадает с теоретическими данными. Точность полученных резуль-



Фиг. 5. Сопоставление теоретического и действительного прироста стада козули *Capreolus capreolus* в Гатчине за 1896—1909 гг. So = 59; r = 2; j = 2; n♂ = n♀; яловость = 20% ♀ производительниц; убыль приплода соответствует ежегодному числу стада по данным учета.

татов, конечно, недостаточна и требует новых исследований. Мы принимали, что ежегодно 20% самок оставались яловыми, между тем эта величина в каких-то пределах колебалась. Вероятно смертность взрослых козуль, которая нам не известна, тоже варьировала в отдельные годы; тем не менее, совпадение хода теоретической кривой с эмпирической кри-

вой прироста стада козули в Гатчине настолько велико, что мы можем с уверенностью сказать, что прирост стада млекопитающих действительно идет по кривой, определяемой константами размножения вида с поправкой, вносимой на смертность приплода до возраста первого плодоношения самки, причем смертность приплода равна в общем 50% родившихся.



Фиг. 6. Логарифмированная кривая роста стада козули *Capreolus capreolus* в Гатчине за 1894—1909 гг. Точки соответствуют lg. lg. погодной численности стада (N). Одно деление абсциссы соответствует одному году; 0.1 такого же деления, отложенного по ординате, = 0.01 логарифмического знака.

Применяя метод логарифмирования ежегодных учетов, мы убеждаемся, что прирост шел по экспоненциальной кривой и можем сделать некоторые дополнительные наблюдения. Нанеся логарифмы учетов на оси координат в масштабе один год — 10 мм и 0.01 логарифмического знака — 1 мм, мы получаем восходящий ряд точек, изображенный на фиг. 6.

Мы видими, что точки весьма точно располагаются на линии, близкой к прямой, что свидетельствует о доброкачественности статистических данных. Рассматривая более внимательно расположение точек, мы обнаружи-

ваем, что отклонение точек объясняется колебанием смертности приплода в отдельные годы. Точки первых трех лет расположены строго по прямой. Для 1898 г., для которого данные отсутствуют, мы взяли логарифм числа 1897 г., увеличенного на средний процент прироста стада за 4 соседних года (1896, 1897 и 1899, 1900). Прямая, проведенная через точку 1898 г., соединяет точки 1900 и 1902 гг. Промежуточные точки 1899 и 1901 гг. несколько уклоняются от этой прямой. Наиболее длинная прямая соединяет точки 1895, 1899, 1900, 1902 и 1905 гг. и пересекает под некоторым углом линию, соединяющую точки последних 4 лет. Отсюда мы можем сделать вывод, что за эти годы шел равномерный прирост стада. Он выражается углом наклона прямой, соединяющей точки к абсциссе и соответствует 21—22% прироста в год.

В 1897 г. принесли свой первый приплод шесть самок уральских козуль, подсаженных в 1895 г., что увеличило продуктивность стада, нарушив в пользу самок нормальное (50 ♂ + 50♀) соотношение самцов к самкам. Но возможно предположить и просто высокий процент выживания приплода за этот год. Во всяком случае, ход номограммы меняется, и проценты прироста в 1889, 1900, 1901 гг. выше, чем за первое трехлетие, и точки располагаются по некоторому новому закону.

В 1902 г. вновь обозначился необычно высокий процент годового прироста, обусловленный, очевидно, высоким выживанием приплода (40%) 1901 г., но в 1903 г. процент прироста понижается, что может быть объяснено только высокой смертностью приплода в этом году; последствия высокого прироста 1902 г. и низкого 1903 г. заметны на годовых приростах 1904 и 1905 гг., когда самки, родившиеся в 1902 и 1903 гг. в свою очередь принесли потомство; далее годовые приросты выравниваются. Последние четыре года, начиная с 1906 г., прирост идет правильно по закону, близкому к закону прироста стада за первое трехлетие. Высокий процент выживания 1902 г. был уравновешен повышенной смертностью и низким приростом стада 1903 г., благодаря повышению процента смертности приплода. В результате в 1906 г. стадо достигло той численности, которую имело бы, если бы прирост шел в темпах 1895—1899 гг. В расположении точек номограммы мы можем подметить еще одну закономе́рность. Начиная с 1898 г. каждые две точки могут быть соединены через одну — 1898—1900, 1899—1901, 1900—1902 гг. и т. д.

В Гатчине козули учитывались в ноябре — декабре каждого года; следовательно, ежегодный приплод регистрировался в 7—8-месячном воз-

расте, когда для них период ранней смертности уже миновал. Они спаривались в августе следующего года, родили на следующую весну, достигнув двух лет. Их приплод попадал в учет опять в 7-месячном возрасте зимой. Таким образом, соединение точек через одну находит свое объяснение в возрасте первого плодоношения самки.

Статистика роста стада козули обрывается 1909 г. Что было дальше, мы не знаем, но, во всяком случае, в течение периода, равного видовой продолжительности жизни, падежа не было.

Динамика стада козули показывает, что размножение популяции позвоночных животных действительно совершается по экспоненциальной кривой, определяемой для каждого вида его видовыми константами размножения и величиной детской смертности. Для птиц мы определили смертность приплода порядка 90—95%, для млекопитающих порядка 50% родившихся. Мы, конечно, не можем удовольствоваться точностью наших цифр и должны поставить новые исследования в природе, чтобы определить норму убыли взрослых, но, во всяком случае, самая возможность произведенного нами анализа представляет интерес, так как показывает возможность весьма точного предвидения прироста стада и построения кривой прироста видовых констант размножения с поправкой на величину детской смертности.

Мы должны сделать еще один важный вывод из наших наблюдений над ходом размножения козули и куропатки, причем этот вывод подтверждается наблюдениями над приростом стада других зверей и птиц, которых в настоящей статье мы не касаемся, а также наблюдениями над относительной численностью возрастных групп у рыб (Баранов, 1917) и потому имеет общее значение. Именно, в нормальные годы годовая убыль каждой старшей возрастной группы с избытком покрывается приростом за счет следующей более молодой возрастной группы; следовательно, как и у рыб, кривая смертности соответствует кривой возрастного состава стада.

Благодаря этому стадо закономерно возрастает в числе, и обычное представление о том, что на смену одной пары родителей остается одна пара потомства — оказывается неправильным. Правильность экспоненциальной кривой прироста стада взрослых особей стада обеспечивается явлением, подмеченным нами при изучении хода размножения глухаря в Гатчине. В Гатчине учитывались выводки глухарей летом и самцы на токах весной каждого года. На токах учитывалась птица взрослая, имевшая не менее трех лет от роду, так как глухарь достигает половой зре-

лости по третьему или четвертому году, следовательно, птица, пережившая период ранней смертности.

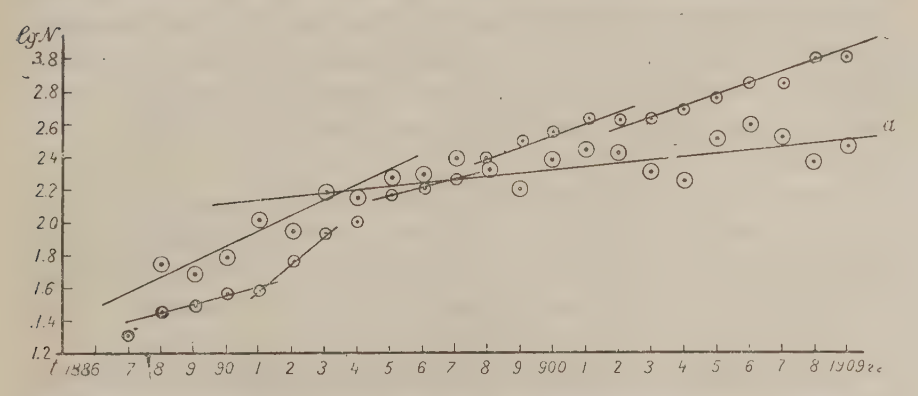
Сопоставление номограммы учетов самцов глухарей на токах и самок с молодыми летом (фиг. 7 «а» и «b») показывает, что ряд точек самцов располагается гораздо правильнее на прямой, чем ряд точек самок с молодыми, которые дают несколько отчетливых волн. Естественное выравнивание кривой взрослых может иметь место только при соответствующих колебаниях процента годовой смертности молодежи. В годы, когда весна была благоприятна и приплод многочислен, последующая смертность бывает сильнее, а в годы, когда весна неблагоприятна, численность молодежи летом мала, последующая смертность, вероятно, бывает ниже. В результате прирост взрослых особей совершается более правильно благодаря компенсаторным обратным изменениям интенсивности ранней и поздней смертности приплода за период. Биологическая картина этого явления нам мало известна, но, по всей вероятности, колебания смертности зависят от изменений в числе хищников. Кривые отстрела хищников показывают сопутственный ход с кривыми прироста дичи. В когти хищника должны попадать преимущественно молодые, не достигшие еще полного развития птицы, тогда как взрослые страдают от хищников меньше. По всей вероятности, именно эти соотношения хищников и добычи, при качественном различии молодежи и взрослых, и определяют колебания смертности. Выравнивание кривой прироста мы видели и на козуле и таким образом мы приходим к следующей схеме. Ежегодно погибает 90% приплода у птиц и 50% у растительноядных млекопитающих.[1] За счет переживших эту гибель неполовозрелых увеличивается группа половозрелых, и стадо закономерно растет в течение некоторого характерного для каждого вида периода. Это нарастание обрывается массовой гибелью не только молодежи, но и взрослых, и после такого падежа начинается новый цикл нарастания стада.

Конечно, такой простой цикл является лишь схемой явления, и в действительности процесс идет значительно сложнее, некоторые депрессии выравниваются, другие при данных константах размножения слишком значительны, чтобы выравняться в один год. Депрессии вызываются различными причинами, и ход убыли стада может быть не одинаков. Так, для менее плодовитых и сравнительно долговечных форм, как козуля и глухарь, мы за известный нам период не наблюдаем депрессий, а у куропатки

[1] Есть основания думать (С. А. Северцов, 1933), что у хищников процент смертности приплода выше, чем у растительноядных, достигая 70—80% родившихся для млекопитающих.

она ясно выражена. Убыль взрослых, повидимому, идет также по экспоненциальной кривой, как и их нарастание. Номограмма куропатки показывает, что нисходящий ряд точек располагается на прямой столь же закономерно, как и восходящий. Не приводя соответствующих графиков, мы можем указать, что депрессии протекают более быстрыми темпами у более плодовитых видов, а у менее плодовитых — более медленными.

Мы нашли, что нарастание численности идет в геометрической прогрессии, определяемой видовыми константами размножения с поправкой на коэффициент смертности молодежи за период j и на нескольких примерах показали, что нарастание численности обрывается периодическими



Фиг. 7. Логарифмированная кривая численности глухарей *Tetrao urogallus* в Гатчине за 1887—1909 гг. Масштаб: 1 год = 5 мм; 0.01 логар. знака = 0.5 мм. *a* (точки в кружках большего размера) — lg. lg. чисел учетов ♂ с молодыми летом на выводках; *b* (точки в кружках меньшего размера) — lg. lg. чисел учетов взрослых ♂ на токах весной.

падежами от стихийных причин или от эпизоотий. Падеж от стихийных причин, очевидно, продолжается, пока действуют эти причины, например, длится наводнение, бескормица от глубокого снега или засуха, но падеж от заразной болезни может длиться значительно большие сроки. Если распространение болезни зависит от густоты населения и обусловливающей передачу заразы, то по мере разрежения населения возможность переноса уменьшается, и болезнь постепенно ослабевает. Под этот случай подходит как непосредственный перенос заразы, так и более сложный случай заражения глистными паразитами, имеющими промежуточных хозяев.

Такие инфекции, как чума, сибирская язва в 1—2 месяца могут уничтожить огромную массу животных, но некоторые болезни, в том числе, повидимому, глистные инвазии могут развиваться с меньшей быстротой, и ход убыли может быть уловлен даже при подсчетах, производимых

однажды в год. Один из крупнейших современных математиков, Вольтерра, разработал теорию флуктуаций численности хищника и добычи, причем изменение численности добычи зависит от числа встреч между этими видами. Хищником Вольтерра называет не только четвероногих или крылатых хищников, но и возбудителей болезни и показывает, что в этом случае убыль вида добычи совершается по отрицательной экспоненциальной кривой, или в убывающей геометрической прогрессии.

Просмотр номограммы куропатки показывает, что убыль стада, как и его нарастание, действительно идет по этому закону, так как точки располагаются на прямой. В действительности, процесс здесь значительно сложнее, чем случай, разбираемый Вольтерра, так как убыль продолжается несколько лет, и в течение каждого летнего периода численность куропаток увеличивается в результате естественного размножения, тогда как Вольтерра допускает, что размножение совершается непрерывно в течение круглого года.

Интересно, что быстрота убыли может быть неодинакова у разных видов и у видов, состоящих из долговечных и мало плодовитых особей, период убыли может растянуться на несколько лет, как видно из кривой, показывающей убыль зубра в Беловежской пуще в семидесятых годах прошлого века.

Таким образом, наши наблюдения как бы подтверждают положения Вольтерра, хотя некоторые из его предпосылок значительно упрощают вопрос и не совсем совпадают со сложными биологическими отношениями, которые мы наблюдаем среди популяций млекопитающих и птиц в живой природе.

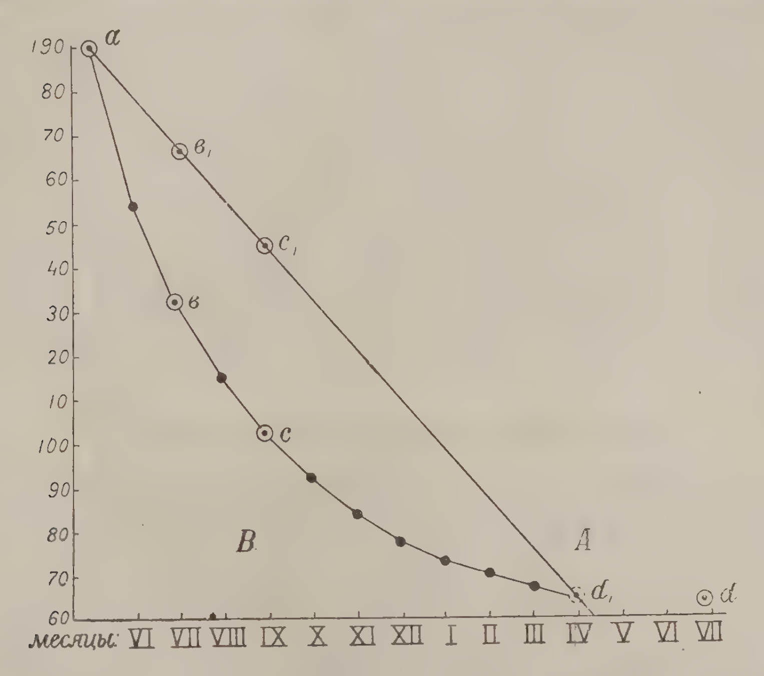
Наблюдений за ходом убыли приплода у нас крайне мало, но есть указания, что убыль молодняка и в этом случае происходит по закону Вольтерра. Я в течение двух лет производил учет летних выводков глухарей в Башкирском заповеднике на Южном Урале. (С. А. Северцов, 1932 г.).

Оказалось, что убыль среднего числа птенцов в выводке идет в убывающей геометрической прогрессии.

По литературным данным, дополненным наблюдениями в заповеднике, я принял среднюю величину кладки глухаря — 8 яиц. Величина выводка оказалась на июль — 4.63, на сентябрь — 2.82 в 1930 г. и 2.87 на август 1931 г. Затем гатчинские данные показали, что за зиму погибает 90% от июньского — июльского учета; следовательно, в нашем случае от выводка до половой зрелости должно было дожить 0.463.

Взяв логарифмы этих величин, я получил номограмму (фиг. 8), которая показывает, что точки располагаются весьма правильно на прямой.

Конечно, необходимы дальнейшие более подробные наблюдения, но в пределах точности цифры мы видим, что убыль идет по отрицательной экспоненциальной кривой a b c d, ход которой мы реконструируем по номограмме; точка d_1, отвечающая точке d (убыль приплода за период j), лежащая на продолжении прямой a b_1 c_1 d_1 приходится на абсциссе IV—V месяцев, т. е. период юношеской смертности ограничивается первым годом



Фиг. 8. Убыль птенцов глухарей *Tetrao urogallus* за первый год жизни. А — логарифмированная кривая; В — экспоненциальная кривая.

юности птицы; предел убыли достигается весной следующего года, когда начинается новый цикл размножения[1]. Ряд наблюдений, произведенных в заповеднике, указывает, что гибель птицы следует приписать прежде всего пернатым и четвероногим хищникам, и мы видим, что в этом случае, как это и следует по Вольтерра, убыль идет по отрицательно экспоненциальной кривой, хотя биологические зависимости здесь, конечно, иные. Вольтерра допускает непрерывное размножение хищника и соответственное синхронное уменьшение численности добычи, в нашем же случае приплод

[1] Исследования 1932 г. подтвердили эти данные и дали возможность построить отрицательную экспоненциальную кривую убыли птенцов за летние месяцы для 2-х видов тетеревей и глухарей на значительно большем материале.

у хищников народился весной одновременно с нарождением дичи. В остальную часть года происходило отмирание дичи и, по всей вероятности, приплода хищника. Этот процесс заканчивается перед началом нового цикла размножения.

В нормальные годы убыль половозрелых особей с избытком покрывается за счет неполовозрелых, и на следующий год группа производителей как дичи, так и хищников возрастает в числе. Это нарастание длится пока добыча—виды растительноядных животных—не погибнут от стихийной причины или эпизоотии. Вслед за их гибелью погибает от бескормицы лишившийся своей добычи хищник. Конечно, эта картина в действительности значительно сложнее, так как обычно хищники не являются монофагами, и не все виды добычи погибают одновременно. Но работы Прибля, Сетона, Эльтона и других показывают, что отмирание хищника связано с массовой гибелью животных, которые составляют основу их питания. Следовательно, циклы нарастания числа и отмирания популяций хищников и растительноядных, которыми хищники питаются, должны более или менее совпадать.

III. СХЕМА ФЛУКТУАЦИИ ПОЗВОНОЧНЫХ И ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

Все сказанное позволяет построить следующую схему динамики популяции. Пережившее падеж число пар растительноядных животных начинает размножаться и весною дает приплод. Этот приплод отмирает в убывающей геометрической прогрессии за период j (для многих форм он равняется одному годовому циклу). Пережившие увеличивают группу производителей, которая возрастает в течение ряда лет по положительной экспоненциальной кривой, определяемой видовыми константами размножения и смертностью одного года жизни. Длительность периода нарастания стада определяется конституцией и биологией вида, так как именно эти свойства вида, выработавшиеся в течение предшествующей эволюции, определяют амплитуду отклонений различных условий внешней среды оптимума, которые вид выносит безболезненно. Нарастание численности купируется очередной депрессией стихийных факторов, а если такая депрессия запаздывает, и население продолжает увеличиваться, то с повышением плотности населения усиливаются моменты, благоприятствующие развитию одноклеточных и многоклеточных паразитов, и размножение купируется эпизоотией.

Благодаря этому уменьшение стада идет так же по отрицательной экспоненциальной кривой, как и отмирание ежегодного приплода, но смертность захватывает и взрослых. Численность вида падает до минимума,

после которого начинается новое нарастание стада. Хищники, питающиеся данным видом растительноядных, дают сопутственный ход кривой, и цикл нарастания стада у них может быть одинаковой длительности, но в некоторых случаях, если хищник может своевременно мигрировать в район, где падеж еще не развился, или перейти на викарную пищу, могут быть и отступления от этого правила.

До сих пор мы говорили только о процессах возрастания и убыли стада во времени, не обсуждая важного вопроса о биологической емкости ареала, занятого популяцией. Между тем, численность разных видов в одной и той же местности неодинакова и, следовательно, разными видами предельная плотность будет достигаться при разной абсолютной численности особей.

Прирост стада, происходящий в геометрической прогрессии, определяемой видовыми константами размножения, идет настолько интенсивно, что всякий даже наиболее медленно размножающийся вид заполняет ареал, пригодный для его обитания, в весьма короткий относительно срок. Путешественники, исследовавшие малоизмененные человеческой деятельностью страны, описывают огромные стада очень медленно размножающихся животных — бизонов в американских прериях, огромные залежки морских котиков и тюленей. Еще Дарвин писал, что медленно размножающийся альбатрос «может быть является самой многочисленной птицей на земле»; можно упомянуть гигантские стаи странствующего голубя, и, наконец, огромную численность копытных в Африке, в начале прошлого века. Все эти примеры показывают, что абсолютная численность вида может быть огромна, несмотря на относительно слабую плодовитость. Но эта многочисленность еще ничего не говорит об относительной численности разных видов, и можно показать, что во многих случаях долговечные и малоплодовитые животные заселяют ареал своего распространения с меньшей плотностью, чем животные плодовитые и недолговечные.

Если для долговечных и малоплодовитых видов предельная биологическая емкость ареала меньше, чем для менее долговечных и сильно плодовитых, то и колебания этих малоплодовитых видов должно быть относительно слабее и количество заселяющих ареал особей, — более постоянным.

В работе 1930 г. я исходил из мысли, что продолжительность жизни каждого животного определяет предельное число поколений или генераций, которые одновременно могут существовать в ареале обитания вида.

Так как особи, пережившие период ранней смертности, за период составляют стойкую популяцию, то видовая продолжительность жизни особи

каждого вида должна соответствовать характерному для этого вида периоду между двумя последовательными падежами.

Исходя из этой мысли, я исследовал зависимость между продолжительностью жизни и плодовитостью у млекопитающих, причем, вычислив коэффициент корреляции между коэффициентом видовой плодовитости q и видовой продолжительностью жизни t, получил коэффициент корреляции, близкий к одному $r = 0.8889$; $Er = 0.0238$.

Я рассуждал следующим образом. Пусть число пар особей родоначальников, переживших падеж, будет S_0, а число особей к концу периода размножения $t - S_t$, тогда мы можем написать: $S_t = S_0 q^t$, где «q» есть коэффициент годового прироста популяции вида, следовательно, S_t прямо пропорционально S_0 и q. Прологарифмировав это выражение и перенеся $\lg S_0$ и $\lg q$ в левую часть, напишем $\frac{\lg S_t - \lg S_0}{\lg q} = t$ или, если $\lg S_t - \lg S_0 = \lg \frac{S_t}{S_0} = \lg V$; $\frac{\lg V}{\lg q} = T$. Мы неоднократно пытались показать, что период нарастания стада для каждого вида должен быть очень постоянен. Отношение $\frac{S_t}{S_0}$ или $\lg V$ есть интенсивность падежа, и мы видим, что при постоянном q она прямо пропорциональна величине t, иначе, чем большей плотности достигло население, тем сильнее падеж. Но коэффициент q определяется наследственно, и мы видим, что при постоянном $\lg q$ и разной интенсивности падежей ($\lg V$) должна соответственно меняться и величина t.

Если $T = t$ постоянно, то и правая часть уравнения, дробь $\frac{\lg V}{\lg q}$, должна быть постоянной, и это возможно, если V и q связаны обратной зависимостью.

В течение периода между двумя повальными падежами, которые сводят S_t к S_0, бывают депрессии меньшей интенсивности, которые нарушают темп прироста стада и отодвигают срок достижения численности S_t, чтобы эта численность, тем не менее, была достигнута в срок T. Должно иметь место соответственное факультативное повышение плодовитости.

Мы видели, при рассмотрении хода размножения козули и глухаря, что действительно имеет место компенсация время от времени наступающей повышенной смертности путем соответственного последующего временного повышения плодовитости стада.

Это повышение достигается или понижением коэффициента смертности приплода или прямо повышением числа детенышей, приносимых самкой или, наконец, понижением процента яловости самок, т. е. повышением числа

детенышей, приносимых стадом, как целое. Это имеет особенное значение для видов, плодящихся не ежегодно, а через большие сроки, как зубр. Меняется ли в течение эволюции интенсивность падежей, мы не знаем, но некоторые намеки на изменение интенсивности падежей в течение эволюции есть, так как уменьшение численности плодовитых грызунов, зайцев, леммингов и других, повидимому, значительно выше, чем те 60% убыли стада куропаток, которые мы констатировали в Гатчине. Но материала для уверенного суждения еще слишком мало. Если же интенсивность падежей эволюировала, то ее изменения должны были отразиться и на видовых константах размножения и на продолжительности жизни животных.

Принимая, что продолжительность жизни особи соответствует частоте падежей, мы можем показать, что с удлинением видовой продолжительности жизни и постоянстве $\lg V$ понижается плодовитость. В 1930 г. для 78 видов млекопитающих мне удалось получить коэффициент обратной корреляции между видовой продолжительностью жизни и плодовитостью $r = 0.899$ при $Er = 0.0238$.

Для нас очевидно, что виды эволюировали дивергентно и в течение этой эволюции одни сделались более долговечными, другие менее, и их плодовитость изменялась соответственно уравнению

$$\frac{\lg V}{\lg q} = T.$$

В настоящей статье мы неоднократно касались работ Вольтерра, указывая, что его основные выводы находят свое подтверждение в наблюдениях над ходом размножения позвоночных, и уместно привести его основные положения и сопоставить с ними наши выводы.

1. Закон периодического цикла. Флуктуации обоих видов являются периодическими, и период определяется только приростом и убылью населения и первоначальным соотношением численности.

2. Закон сохранения средней численности. Среднее число особей обоих видов остается постоянным и как таковое определяется начальным числом, покуда коэффициент прироста и убыли (рождаемость) остается неизменным и пока остаются неизменным коэфициенты защиты и нападения. Это значит, что оба находятся в статистическом равновесии, которое, однако, никогда не достигается, но является средней непрерывных волнообразных колебаний, причем среднее число считается для каждого вида постоянным.

3. Закон нарушения среднего числа. Если будет сделана попытка уничтожать особей обоих видов в одинаковой степени, соответственно их относительной численности, то относительная численность вида добычи уве-

личится, а вида преследователя — уменьшится. Увеличение охраны вида, служащего добычей, увеличивает также численность вида хищника.

Для случая, когда флуктуации не велики, могут быть приложены следующие законы: 1) мелкие флуктуации изохронны, т. е. их период не зависит заметно от начального числа особей и определяется исключительно соотношением между коэффициентом защиты и нападения; 2) период флуктуации пропорционален геометрической средней времени, в течение которого первый вид сам по себе удваивается в числе, а второй уменьшается на половину; 3) когда в одинаковые промежутки времени популяции уменьшаются на одинаковое число особей, уничтожение особей вида биофага ускоряет флуктуацию, а уменьшение вида добычи задерживает ее.

Факты говорят, что убыль и нарастание стада идут по экспоненциальной кривой, определенной для каждого вида видовыми константами размножения; убыль стада, поскольку она зависит от биологических факторов, также идет по отрицательной экспоненциальной кривой, но в то же время общая картина флуктуации численности по крайней мере у позвоночных оказывается иной, чем предполагал Вольтерра. Волна нарастания и убыли стада образована несимметричными кривыми. Нарастание идет по более пологой восходящей, а убыль по более крутой нисходящей кривой. Четвероногие хищники не уменьшают периодически числа растительноядных, как допускает Вольтерра. Их число увеличивается пропорционально росту популяции травоядных, и они отмирают вместе с ними. По всей вероятности теория незатухающих флуктуаций Вольтерра остается правильной по отношению к повальным болезням, вызванным паразитами, когда заражение является функцией численности стада и частоты встречаемости зараженных и не зараженных особей.

Повидимому, можно указать еще на одно крайне любопытное обстоятельство, которое, однако, нуждается в проверке и дополнительных исследованиях.

По Вольтерра, если вид-хищник и вид-добыча в равной мере подвергаются уничтожению от некоторой третьей причины, например, вылова человеком, то численность хищника падает ниже, чем численность вида добычи. Биологически это вполне понятно, так как убыль хищника идет и за счет его непосредственного изъятия и за счет убыли корма от гибели растительноядных форм.

Корреляционная таблица долговечности и плодовитости млекопитающих дает возможность подметить, что при равной продолжительности жизни хищники являются более плодовитыми, чем виды травоядных, которыми

они питаются. Между тем мы знаем, что относительная численность хищников всегда меньше, чем травоядных. Такое противоречие между коэффициентом потенциальной плодовитости и меньшей относительной численностью плотоядных видов заставляет предполагать, что смертность у них больше, чем у растительноядных, так как они погибают не только от причин, уничтожающих непосредственно хищников, но и от причин, уничтожающих виды, которыми они питаются. Меньшая стойкость хищника к воздействиям среды компенсируется большим коэффициентом плодовитости хищника. В этом мы можем видеть биологическую, выработавшуюся в течение эволюции поправку к закону, выведенному Вольтерра на основании рационального анализа вопроса. Мы можем резюмировать выводы настоящей работы следующим образом:

1. Численность каждого вида животных не остается постоянной в результате естественного размножения; численность каждого вида из году в год возрастает по закону экспоненциальной кривой, определяемой видовыми наследственными свойствами каждого вида с поправкой на величину смертности ежегодного приплода и взрослых особей.

2. Величина смертности приплода для птиц определяется в 90%, для млекопитающих — 50% родившихся, причем эта убыль в общем покрывает годовую убыль взрослых производителей.

3. Убыль приплода идет по отрицательной экспоненциальной кривой.

4. Через известные периоды, характерные для каждого вида и определяемые его выработавшейся в течение эволюции способностью выносить крайние отклонения внешних условий от оптимума, размножение вида купируется падежом от стихийных причин, после которых вид начинает опять размножаться по прежнему закону.

5. Чтобы очередной падеж переживало достаточное количество особей для продолжения рода, вид в течение благополучного периода должен достигнуть максимальной численности.

6. Если население не будет своевременно разрежено абиотическими факторами, то оно будет разрежено повальной болезнью, распространению которой благоприятствует повышенная плотность населения.

7. Хищники только замедляют прирост растительноядных, уничтожая большую часть годового приплода, но не останавливают его. Болезни, причиняемые многоклеточными и одноклеточными паразитами, резко уменьшают численность позвоночных; убыль в этом случае совершается по отрицательной экспоненциальной кривой и продолжается, пока численность стада не достигнет известного минимума.

Основываясь на этой картине, мы можем сделать некоторые выводы об эволюции плодовитости. Так как этот вопрос представляет очень большую сложность, то подробному разбору его мы предполагаем посвятить особую статью, а здесь ограничимся самыми общими выводами.

В течение эволюции видовые константы размножения и коэффициенты смертности взрослых и молодежи изменяются, и мы, сравнивая, как это делает сравнительная морфология, различные виды между собою, можем попытаться представить себе эволюцию их биологии.

В каждый данный момент существования вида он обладает определенной кривой смертности, определенным циклом нарастания и убыли стада, при котором его убыль от разрушающих биотических и абиотических факторов внешней среды компенсируется его плодовитостью и соответствует видовой продолжительности жизни особи.

Это равновесие есть только кажущееся равновесие, так как вид, в результате борьбы за существование, непрерывно изменяется, и когда мы с большей детальностью и точностью сможем сравнить плодовитость и продолжительность жизни близких видов и может быть и отдельных колоний одного и того же вида, то сможем это показать и на современной фауне. В течение эволюции повышается адаптированность каждого вида к окружающим условиям среды. В результате, каждое повышение увеличивает норму выживания особей, и они делаются более долговечными. Численность особей, в данный момент существующих в стаде, увеличивается в этом случае как за счет рождения новых, так и за счет большей долговечности взрослых. Тут возможны очень различные комбинации. Например: 1) возрастает стойкость особей по отношению к абиотическим факторам, что должно непосредственно удлинить промежуток между двумя стихийными падежами; 2) могут усилиться защитные приспособления добычи, тогда уменьшится процент гибели от хищников; 3) могут усилиться аггресивные приспособления хищника, его способность добывать пищу, что понизит норму выживания соответствующих видов добычи, а с уменьшением ее повысит смертность хищника, и многие другие. В общем, повышение адаптированности должно повысить продолжительность жизни особи.

Но цикл нарастания численности популяции едва ли удлинится, и едва ли эта вновь приобретаемая продолжительность жизни получит осуществление, так как тем самым усиливаются условия развития заразных болезней, которые будут купировать рост популяции, как только она достигнет известного предела. Следовательно, заразные болезни будут задерживать удлинение цикла нарастания стада, и только те популяции, у кото-

рых будет понижаться плодовитость, смогут удлинить биологическую продолжительность жизни особи за эти пределы.

Понижение плодовитости популяции в некоторых случаях достигается повышением возраста первого плодоношения (j) и периода между двумя последовательными плодоношениями (p). Но у видов, плодящихся в годовалом возрасте, должно преобладать уменьшение числа детенышей. Таким образом, возбудители повальных болезней являются причиной отбора наименее плодовитых популяций, если только тот же результат не достигается эволюцией индивидуального развития. Наконец, необходимо указать и на изменение коэффициента смертности молодняка, которая должна повыситься в результате усилившейся конкуренции с более многочисленными и вполне развитыми взрослыми особями. Все эти причины должны замедлять прогрессивную эволюцию вида.

Далее мы можем себе представить процесс эволюционного понижения продолжительности жизни или в результате повышения частоты падежей от стихийных факторов, или в результате повышения коэффициента хищности плотоядных животных.

Повышение частоты климатических депрессий, например при наступлении ледникового периода, могут пережить только плодовитые виды, или виды, повышающие свою плодовитость и успевающие восстановить численность в более краткие сроки, чем ранее. По ряду оснований я склонен думать, что этот случай едва ли часто встречается.

Большее значение имеет второй случай, когда повышается истребление хищниками растительноядных животных: при повышении коэффициента хищности фитофаги должны соответственно повысить свою плодовитость или исчезнуть с лица земли.

Что такое вторичное повышение плодовитости действительно имело место среди млекопитающих, убеждает нас следующее соображение. Уменьшение числа детенышей соответствует уменьшению числа млечных желез. У примитивных млекопитающих мы находим большое число млечных желез (Centetes до 24 пар), тогда как даже у плодовитых и грызунов число млечных желез не превышает 6—8 пар, и следовательно у их предков имел место процесс редукции числа детенышей. Плодовитость мышей или зайцев очень велика благодаря тому, что они приносят несколько пометов в сезон, а многие и созревают настолько быстро, что детеныши приносят приплод в то же лето. Это явление вторичное и соответствует вторичному повышению плодовитости, компенсирующему усиление истребления хищниками, и понижению продолжительности жизни особи. Соответ-

ственно этому грызуны размножаются настолько быстро, что их продолжительность жизни уже не совпадает с частотой климатических депрессий, и они обычно периодически погибают от эпизоотий.

Таким образом, наиболее характерные моменты биологии грызунов, копытных и хищников находят свое объяснение в эволюции экологии размножения.

Лаборатория эволюционной морфологии
Академии Наук СССР.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алпатов и Гаузе. Логистическая кривая и ее применение в области количественной биологии. Журн. эксперим. биол., т. 6, вып. 4, 1930.
2. Баранов Ф. Н. К вопросу о биологических основаниях рыбного хозяйства. Изв. отд. рыбов. и научно-промысл. иссл., т. 1, 1, 1917.
3. Brehm. Tierleben, 4. Ausg.
4. Chalmers B. Mitchell. On longevity and relative viability in Mammals and Birds. With a note on the theory of Longevity. Proc. of the Zool. Soc. London, 1911.
5. Chapman R. The trend of insect population from the view point of biotic potential and enviromental resistance. Cit. nach Friderichs.
6. Eckstein Charles, Prof. Résultats obtenus jusqu'ici par le système des marques de l'identification du gibier en Allemagne. II Congr. internat. de chasse. Vienne. Rapports des Sections.
7. Cholodovskij. Sur le calcul de multiplication des êtres organiques. Travaux du Laboratoire géochimique près de l'Académie des Sciences URSS, 1930.
8. Динник. Звери Кавказа. Тифлис, 1910.
9. Elton. Periodic fluctuaction of the numbers of Animals, their causes and effects. Brit. Journ. exper. Biol., vol. 2, 1927.
10. Fischer R. A. The genetical theory of natural selection.
11. Friderichs. Die Grundfragen und Gesetzmessigkeiten der Land-forstwirtschaftlichen Zoologie, 1930.
12. Гаузе Т. Ф. Логистические кривые роста населения Ленинграда. Докл. Акад. Наук СССР, 1930.
13. Карцев. Беловежская пуща. Пбг., 1910.
14. Кашкаров Д. Н. Метод количественного учета фауны позвоночных и анализ полученных данных. Тр. Ср.-Аз. Гос. унив., сер. 8 а, вып. 1, Ташкент, 1927.
15. Kiessling. Der Rothirsh und seine Jagd. Neudamm., 1919.
16 Лобачев С. В. Некоторые вопросы организации и ведения охотничьего хозяйства на севере Европейской части СССР. Тр. по лесн. опытн. делу Центр. лесн. ст. Нар. ком. земл. РСФСР, вып. 8, 1930.
17. Мензбир. М. А. Охотничьи и промысловые птицы Европейской России и Кавказа, 1902.
18. —— Птицы России. М.
19. Pearl R. The effect of war on the chief factors of population change. Sience, n. s., vol. 51, 1926.
20. Pearl. The rate of living. 1928, New Jork. A. Knopf.

21. Pearl and Reed. On the rate of growth of population of the Un. States of America since 1790 and its matemathical representation. Proc. Nat. Soc., 1920.
22. Preeble E. Birds and Mammals. A biological survey of the Pribiloff island Alasca in North America fauna.
23. Plate. Selections princip, 1913.
24. Сабанеев Л. П. Тетерев косач. Монография. «Природа», ест.-ист. сб. М., кн. 1—4, 1874—1877 гг.
25. Глухой тетерев. Монография (там же).
26. Sewertzoff A. N. On the factors which determine the duration of the life of multicellular animals. A preliminary notice. Revue zool. russe, t. 2, livr. 3—4, 1917.
27. Северцов С. А. Материалы к познанию биологии размножения *Tetraonidæ* в Башкирском заповеднике в 1930 г. Тр. Лабор. прикл. зоол. АН СССР, 1932, вып. 3.
28. Материалы к познанию размножения *Tetraonidæ* в Башкирском заповеднике в 1931 г. Русск. зоол. журн., 1932, кн. 3—4.
29. О взаимоотношении между продолжительностью жизни и плодовитостью различных видов млекопитающих. Предв. сообщ. Изв. АН СССР, 1930, вып. 9.
30. Graf Silva-Taruca. Kein Heger, kein Jäger. Ein Handbuch der Wildpflege. Berlin, P. Pares, 2. Ausg., 1929.
31. Страховский и Лобачев. Показатели и их роль в охотничьем хозяйстве СССР. Тр. по лесн. опытн. делу Центр. лесн. ст. Нар. ком. земл. РСФСР., вып. 7, 1930.
32. Tomson Seton. Life hystory of Northern animals. Baltimore, 1909.
33. Туркин и Сатунин. Звери России. М. Прил. к журн. «Природа и охота».
34. Туркин Н. В. Общий статистический обзор охотничьих и промысловых зверей России. Звери России. Т. 1, вып. 1. Н. В. Туркин — К. А. Сатунин. М. Тип. И. Н. Кушнерева и К°, 1900.
35. Труды второго всероссийского съезда охотников в Москве 17—25 ноября 1909. Изд. орган. ком. съезда. Тип. Кушнерева. М. 1911
36. Чугунов. Биология молоди промысловых рыб Волго-Каспийского района. Тр. Астрах. рыбохоз. ст., т. 7, вып. 1928.
37. Volterra V. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali convivanti. R. Comitato Thalassografico Italiano mem., 131, 1927. cit. nach Friderichs.
38. —— Математическая теория борьбы за существование. Пер. акад. П. П. Лазарева. Успехи физических наук., т. 8, М. 1928.
39. Ушаков Л. Остерегайтесь вредных ошибок. Журн. «Московский охотник», 1929, № 11.

СВЕДЕНИЯ О ЧИСЛЕННОСТИ СЕРОЙ КУРОПАТКИ (*Perdix perdix*) В ГАТЧИНЕ за 1886—1909 гг.
(по «Сведениям» Дица, обработанным С. А. Северцовым)

Таблица 1

Годы	Число производителей N (♂ + ♀) равное удвоенному числу выводков	Число молодых по данным летних учетов	% ежегодного отстрела	% смертности стада за зиму по отношению к численности птиц на лето предшествующего года за вычетом отстреленных	% выживания молодых за год	% смертности молодых за год по отношению к численности молодых на лето предшествующего года за вычетом отстреленных	% прироста (и убыли) взрослых птиц по отношению к числу производителей предшествующего года за вычетом отстреленных
1886	104	363	14.3	—	—	—	—
1887	226	903	1.4	40.0	39.2	60.9	+ 117.0
1888	258	896	1.2	75.2	3.1	97.0	+ 14.0
1889	314	1198	10.8	72.1	6.8	93.2	+ 22.0
1890	454	2043	3.8	68.1	12.0	88.0	+ 45.0
1891	646	2968	2.6	71.0	9.8	89.2	+ 43.0
1892	302	950	3.5	91.5	0.0	100.0	— 53.0
1893	268	1010	5.8	76.0	0.0	100.0	— 11.0
1894	314	1122	0.2	70.3	4.8	95.2	+ 17.0
1895	330	1534	5.8	72.5	6.8	93.2	+ 24.0
1896	540	2111	5.9	67.4	10.3	89.7	+ 38.0
1897	600	2604	6.4	72.7	3.1	96.9	+ 11.0
1898	714	2934	3.4	72.5	4.6	95.4	+ 19.0
1899	552	1698	11.9	96.8	0.0	100.0	— 25.0
1900	422	1421	7.0	71.7	0.0	100.0	— 19.0
1901	636	2286	7.3	60.0	1.6	98.4	+ 50.0
1902	380	1315	6.7	81.3	0.0	100.0	— 40.0
1903	332	1031	3.1	75.5	0.0	100.0	— 12.0
1904	348	1181	9.6	72.3	1.6	98.4	+ 5.0
1905	394	1424	—	67.0	4.3	95.7	13.0
1906	410	1499	13.5	77.4	0.0	100.0	4.0
1907	288	921	17.3	68.5	0.0	100.0	— 30.0
1908	360	1048	3.6	46.2	9.5	90.5	+ 25.0
1909	390	1312	—	70.0	29.8	70.2	+ 8.0
	—	—	в среднем 6.3	в среднем 71.8	в среднем 6.45	в среднем 94.2	Прирост за годы увеличения стада 28.4 в среднем. Убыль производителей за первые годы из 2—3 л. падежа — 39.0 в среднем. Убыль производителей за вторые годы падежа 14.0 в среднем.

ВЕДЕНИЯ О ЧИСЛЕННОСТИ КОЗУЛИ (*Capreolus* sp.) В ОКРЕСТНОСТЯХ ГАТЧИНЫ за 1892—1909 гг.
(по сообщению Дица 1909 г.).

Таблица 2

Годы	Привезено козуль	Убито	По подсчету имелось в лесах	% прироста стада за год	% выживания приплода	% смертности приплода за период j
1892	20♂ + 21♀	—	41	—	—	—
1893	—	1	—	—	—	—
1894	—	—	—	—	—	—
1895	3♂ + 6♀	—	—	—	—	—
1896	—	—	59	—	—	—
1897	—	—	72	22.0	30.0	70.0
1898	—	—	—	—	—	—
1899	—	1	127	76.0	64.0	36.0
1900	—	—	160	26.0	61.0	39.0
1901	—	—	204	28.0	57.0	43.0
1902	—	—	287	41.0	55.0	45.0
1903	—	1	321	12.0	27.0	73 0
1904	—	1	425	32.0	64.0	36.0
1905	—	—	498	15.0	28.0	72.0
1906	—	—	635	27.0	57.0	43.0
1907	3♂ + 3♀	1	755	19.0	35.0	65.0
1908	—	—	872	16.0	29.0	71.0
1909	—	6	1068	23.0	48.0	52.0
	—	—	—	—	в среднем 46.0	в среднем 54.0

A. SEWERTZOFF. ZUM PROBLEM DER DYNAMIK DER HERDE BEI DEN WIRBELTHIEREN

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Aufsatz erforscht der Verfasser das Problem der Ökologie der Vermehrung der höheren Wirbeltiere, und zieht den Schluss, die Zunahme einer Population von irgend welcher Tierart sei durch die Artenkonstante der Vermehrung zu bestimmen, nämlich: durch die Zahl der von jedem Weibchen im Jahre erzeugten Jungen («r»); durch das Alter in dem der erste Abwurf des Weibchens stattfindet (j); die Zeitperiode zwischen zweien aufeinanderfolgenden Würfen eines Weibchens (p); die Korrelation zwischen den Gesamtzahlen beider

Geschlechter (♂: ♀); der Sterilitätskoeffizient der Weibchen (f) und die Koeffiziente der Sterblichkeit der Jungen sowie der Eltern.

Der Verfasser stellt fest, die Zunahme der Herde folge einer exponentialen Kurve wobei letztere für jede einzelne Tierart durch die Bedeutungen der Artkonstanten der Vermehrung definiert wird. Zu seinen Forschungen benutzte er die jährliche Statistik des Wildbestandes im Jagdgebiete von Gattschina. Auf Grund derselben wird der Koeffizient der Sterblichkeit der Jungen vor der Erreichung des Alters des ersten Abwurfes des Weibchens (m) mit 90% für Vögel und 50% für Säuger festgestellt.

Die Forschungen im Staatsschutzgebiet in Baschkirien zeigten, dass die Abnahme der Jungenzahl bei *Tetraonidæ* auf negativer Exponentialkurve abnimmt: also erweist es sich, dass wie der Zuwachs, so auch die Abnahme der Herde auf Exponentialkurven folgen.

Was die Sterblichkeit der erwachsenen Tiere anbetrifft, so deckt die Zahl der überlebenden Jungen mit Überfluss die jährliche Abnahme der Alten; es geschehen aber bei allen Arten — vielleicht mit verschiedener Frequenz — Massenuntergänge, die entweder durch Naturereignisse oder durch Epizootien verursacht werden: in solchen Fällen stirbt beinah die gesamte junge Tierbevölkerung der Gegend, sowie auch ein bedeutender Teil der Erwachsenen aus.

Da die klimatischen Verhältnisse in ungleichem Masse auf die Sterblichkeit verschiedener Arten einwirken, so ist die Frequenz der Massenuntergänge für verschiedene Arten auch verschieden.

Der Beginn und die Fortdauer solcher Massenuntergänge, welche durch Klimaschwankungen — wie schwere Schneefälle, Überschwemmungen u. s. w. — oder durch mit denselben verbundene Hungersnot hervorgerufen werden, — und die Epizootien stehen in Gegensatz zueinander.

Unter dem Einflusse, der, im Laufe der Evolution erworbenen, «potentialen Fruchtbarkeit», erreicht die Artenzahl, im Zeitraume zwischen zwei aufeinander folgenden Naturdepressionen, ihr Maximum; und es ist nur bei dieser Bedingung möglich, dass die für das Weiterleben der Art nötige Zahl der Einzeltiere den Massentod überleben kann. Zuweilen kommt es aber vor, dass der nächstfolgende Massenuntergang durch Klimaschwankungen nicht stattfindet und dass infolgedessen die Dichte der Population in kurzer Zeit die Grenze, bei der die Verbreitung von ansteckenden Seucheerregern begünstigt wird, erreicht. Die Tiermenge wird durch die Seuche verdünnt, bis sie schliesslich wieder jene Grenze erreicht, bei der die Infektionsverbreitung aufhört.

Auf diese Weise sind beide Faktoren, die den Massenuntergang verursachen, für die maximale (S) und die minimale (S_0) Individuenzahl einer gegebenen Tierart bestimmend.

Der Zeitraum zwischen zwei Massenuntergängen (t) entspricht auf exponentialer Kurve der Periode, während derer die Vermehrung der Herde stattfindet; ebenfalls entspricht er der Zahl der gleichzeitig in der Herde lebenden Generationen. Der Verfasser machte die Beobachtung, dass in manchen Fällen die Dauer des Termins der Populationszunahme — der Lebenslänge der Arten entspricht.

Solcher Zusammenhang soll dadurch begründet werden, dass, während der Periode der Herdevermehrung, die Sterblichkeit gewöhnlich von der Geburtenfrequenz überwiegt wird; es erliegen hauptsächlich die Jungen, die die Geschlechtsreife noch nicht erreicht haben; jene Einzeltiere aber, die dem Tode glücklich entgangen sind, leben dann noch eine gewisse Frist weiter, und für verschiedene Arten ist die Dauer dieser Frist verschieden.

In seiner Analyse der exponentialen Kurvengleichung $S_t = S_0 q^T$ (wo S_0 = der Stückzahl der den Massenuntergang Überlebenden bedeutet, q = dem Koeffiziente der alljährlichen Zunahme, S_t = der Stückzahl nach t Jahren, wobei T = t die Lebensdauer der Art bezeichnet, die der Periode zwischen zwei Massenuntergängen t äquivalent ist) zieht der Verfasser den Schluss, $T \geqslant t$ sei der Intensivität der Massenunterganges direkt proportional; der Logarithmus des Koeffizienten der Artfruchbarkeit (q) sei aber der Lebensdauer umgekehrt proportional.

Wie es der Verfasser in seiner Mitteilung im Jahre 1930 schon gezeigt hat, besteht zwischen der Lebensdauer T und dem Koeffizienten der Artfruchtbarkeit eine umgekehrte Korrelation, die durch die Formel $\frac{\log (S_t : S_0)}{\log q} = T$ kalkuliert wird. Das heisst, das die Evolution der Lebensdauer und Fruchtbarkeit bei den Landwirbeltieren nach dem Prinzip der obengenannten Gleichung stattfindet.

Der Verfasser nimmt an, dass jede neue, von der Tierart erworbene Anpassung der erwachsenen Einzeltiere, die Durchschnittslebensdauer der Gesamtpopulation verlängere. Diese Verlängerung geschieht im Laufe der progressiven Evolution.

Die Abnahme der Sterblichkeit, mit Vorbedingung vormaliger Fruchtbarkeit der Population, beschleunigt die Erreichung jener Dichtigkeitsgrenze, welche die Verbreitung von Seuchen befördert. Deswegen wurden Populationen mit geringer Fruchtbarkeit durch Naturauswahl bevorzugt. Das Sinken der Fruchtbarkeit liess sich in der Verminderung der jährlichen Jungenzahl eines Weibchens wahrnehmen, sowie auch in der Erhöhung des Geschlechtsreifealters und der Verlängerung des Zeitraums zwischen zwei aufeinanderfolgenden Geburten, dem Koeffiziente der Artfruchtbarkeit $q = \left(1 + \frac{r}{j}\right)^{\frac{1}{p}}$ entsprechend.

Die Arbeit des Professors Volterra in Betracht ziehend, zog der Verfasser den Schluss, die Feststellungen des Professors Volterra seien nicht in allen Fällen mit der Natur übereinstimmend. 1) Fluktuationen der Zahl der Biophagae- und Phytophagaearten finden in Wirklichkeit niemals statt, insofern von wilden Fleisch- und Pflanzenfressern gesprochen wird; höchstwahrscheinlich wären sie nur in Fällen von Epizootien berechtigt, wo die Kranken und infektionverbreitenden Tiere die Rolle der Vernichter spielen. 2) Die Kurven der Fluktuationen der Pflanzenfresser sind nicht symmetrisch: das hinaufsteigende Stück der Linie ist viel länger und weicht dadurch bedeutend vom herabsteigenden ab. 3) Die Ab- und Zunahme der Gesamtpopulation der Raubwirbeltiere geschieht, in gewissem Grade, in synchronischem Verhältnisse zu der Zahl der Beute.

Das 3. Gesetz Volterra's, laut welchem die Gesamtzahl der Raubtiere sich rascher vermindert, als die der Beutenart, wenn diese Verminderung durch irgend welche dritte Ursache hervorgerufen wurde, — ist richtig. Auf diesem Gesetz könnte man die — im Vergleich mit den Phytophagaearten — höhere Fruchtbarkeit der Raubtiere begründen. Trotz seiner kaum berechtigten Voraussetzungen, hat Volterra hier die höchst interessante Meinung ausgesprochen, die Korrelation zwischen Tier und Beute sei nicht durch die absolute Artenzahl, sondern durch die Frequenz der Zusammenstösse der Arten in der Biocönose zu bestimmen.

Оглавление — Sommaire

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала

Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original

Цена 3 руб. 50 коп.